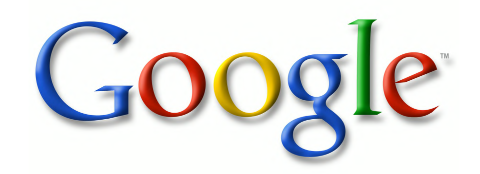


MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 15

WITTING UND GEBHARDT

BEISPIELE ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

II



VERLAG B.G.TEUBNER LEIPZIG UND BERLIN

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik und Physik für Schule und Leben. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von

Dr. W. Lietzmann und **Dr. A. Witting**
Direktor der Oberrealschule zu Jena — Studienrat, Gymnasialprof. in Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. —.80

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementaren Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/17):

1. Ziffern und Ziffernsysteme bei den Kulturvölkern in alter und neuer Zeit. Von E. Löffler.
2. Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner.
3. Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Auflage.
4. Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen. Von O. Meißner.
5. Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding.
6. Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias.
7. Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner.
8. Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth.
9. Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting.
10. Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und A. Trier. 2. Aufl.
11. Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühlke.
12. Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel.
13. Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen.
14. Darstellende Geometrie des Geländes. Von R. Rothe.
15. Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhardt.
16. Die Anfertigung math. Modelle. (Für Schüler mittl. Kl.) Von K. Giebel.
17. Dreht sich die Erde? Von W. Brunner.
18. Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens.
19. Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman.
20/21. Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff.
22. Soldaten-Mathematik. Von A. Witting.
23. Theorie und Praxis des Rechenschiebers. Von A. Rohrberg.
24. Die mathemat. Grundlagen der Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell.
25. Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann.
26. Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst.
27. Karte und Kroki. Von H. Wolff.
28. Die Funktionsleiter. Erster Teil einer Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey.

In Vor[...]

Baruch, Tag u. Stunde. Dieck, Nichteuklid. G[...] [...]rchitektur.
Lietzmann, Was ist Geld? Pfeifer, Photo[...] [...]e Schnitt.

Verlag von B. G. Teubn[...] [...]Berlin

Umstehendes Bildnis zeigt in der Mitte den [...] [...]er, die Handhabung

Titelbild

aus einer alten Arithmetik des Gemma Frisius vom Jahre 1568

Der Rechenmeister in der Mitte erklärt die Handhabung des Rechenbretts. Der Schüler rechts löst seine Aufgabe mit Rechensteinen „auf der Linie", der links sitzende scheint dasselbe „mit der Feder" getan zu haben.



MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
15

BEISPIELE ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

EIN MATHEMATISCH-HISTORISCHES LESEBUCH

II. TEIL

VON

DR. ALEXANDER WITTING
PROF. AM GYMNASIUM
ZUM HEIL. KREUZ ZU DRESDEN

UND

DR. MARTIN GEBHARDT
PROF. AM VITZTHUMSCHEN
GYMNASIUM ZU DRESDEN

MIT EINEM TITELBILD UND
28 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913



VORWORT

Zur Herausgabe von mathematisch-historischen Lesebüchern, die im wesentlichen Beispiele aus mathematischen Werken früherer Zeiten enthalten, haben wir uns in der Meinung vereinigt, daß solche Bücher in anregenderer Weise und zugleich auch eindringlicher namentlich der reiferen Jugend die Kenntnis vom Werden der Wissenschaft vermitteln, als eine Darstellung, die nur gelegentlich Beispiele heranzieht und doch meist nur von Fachleuten gelesen wird.

Diese unsere Bändchen, von denen das erste hier vorliegt, wenden sich getreu den Grundsätzen der „Mathematischen Bibliothek" an breitere Schichten, vor allem an die Schüler unserer höheren Lehranstalten. Wir geben uns der Hoffnung hin, daß diese Bändchen mehr und mehr auch im Unterrichte zur Einführung gelangen werden; denn nur dann wird eine nachhaltige Beeinflussung der mathematischen Erziehung möglich sein. Eine solche soll die Mathematik auch als einen wesentlichen Bestandteil der Geisteskultur erkennen lassen.

Mancher wird vielleicht bedauern, daß alle fremdsprachlichen Abhandlungen nur in deutscher Übersetzung gegeben wurden; dies Bedauern teilen auch die Verfasser. Maßgebend war hierfür einmal der beschränkte Raum, der uns auch biographische Notizen unterdrücken ließ. Dann aber wäre es auch wohl kaum möglich, etwa arabische oder italienische Texte in der Ursprache Schülern in die Hände zu geben; das Latein verbietet sich für die Oberrealschulen und Griechisch, was in einem der nächsten Bändchen die Originalsprache sein wird, für das Realgymnasium.

Überall, wo die Originale den Verfassern erreichbar waren, sind sie als Quellen benutzt worden. Dadurch wurde es zu-

gleich möglich, die meisten Figuren in treuer Nachbildung zu geben.

Mögen diese mathematisch-historischen Lesebücher, mit denen sich lang gehegte Wünsche der Verfasser[1]) erfüllen, neben der Belebung des Unterrichts auch der Förderung mathematischen Interesses dienen.

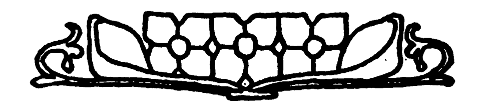
Zum Schluß sprechen wir Herrn Eneström (Stockholm) für seine freundliche Mithilfe bei der Korrektur unseren Dank aus.

1) Vgl. hierzu auch M. Gebhardt, Geschichte der Mathematik im Unterrichte ... Abh. d. I.M.U.K. III. 6. Leipzig, Teubner 1912.

Dresden-Strehlen, August 1913

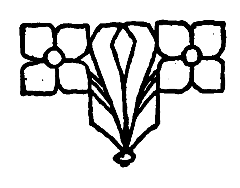
ALEXANDER WITTING
MARTIN GEBHARDT

INHALT



Pitagoras dir sagt fürwar /
  All ding durch zal wird offenbar
Drumb sih mich an / verschmeh mich nit /
  Durchließ mich vor / das ich dich bit.
Und merck zum anfang meiner Lehr /
  Zu rechens kunst dadurch dich kehr.
In Zal / in Maß vnd in Gewicht /
  All ding von Gott sind zugericht.
Denn klerlich Salomon das sagt /
  Ohn zal und maß Gott nichts behagt.
Beschreibt vns auch S. Augustin
  Vnd malet uns frey in den sin.
Sich sol kein Mensch nichs unterstehn /
  Kein Göttlich / weltlich kunst begehn.
Ohn rechens art durch ware zal /
  Bewert ist das in manchem fall.
Ein Mensch dem zal verborgen ist /
  Leichtlich der verfürt wird mit list.
Dis nun zu hertzen bit ich sehr
  Vnd jeder sein Kind rechnen lehr.
Wie sichs gegen Gott und Welt verhalt /
  So werden wir mit Ehren alt.

Adam Riese, 1529.



DAS BUCH DER AUFFINDUNG DER SEHNEN IM KREISE VON ABŪ'L-RAIHĀN MUH. EL-BĪRŪNĪ.

(UM DAS JAHR 1000.)

Aus dem Arabischen übersetzt von Heinrich Suter. Bibl. math. 3. Folge Bd. 11. 1910–11.

. . . .

DIE ERSTE BEHAUPTUNG.

Wenn in einen beliebigen Kreisbogen eine gerade Linie ungleich gebrochen gelegt wird, und von der Mitte des Bogens eine Senkrechte auf sie gefällt wird, so wird sie dadurch halbiert. Z. B.: ABG sei die gebrochene Linie im Bogen ABG, und von der Mitte D dieses Bogens sei die Senkrechte DE auf sie gefällt, so sage ich, daß die gebrochene Linie ABG halbiert sei, d. h. daß $AE = EB + BG$. Gott weiß am besten das Richtige!

. . . .

BEWEIS VON MIR ZU DIESEM (SATZE).

Ich sage: Man vervollständige den Kreis (Fig. 1) und ziehe DB, DG, DA, mache $EZ = EB$, ziehe DZ und verlängere es bis zu seinem Durchschnitt H mit dem Kreise. Nun ist $AD = DG$, da sie Sehnen gleicher Bogen sind, und $DB = DZ$ wegen der Kongruenz der Dreiecke DEB und DEZ, und $\sphericalangle BGD = \sphericalangle BAD$, weil sie auf demselben Bogen stehen, und $\sphericalangle BDG = \sphericalangle ZDA$, denn $\sphericalangle DZB = \sphericalangle ZDA + \sphericalangle ZAD$, also auch $\sphericalangle DBZ = \sphericalangle ZDA + \sphericalangle ZAD$: nun steht $\sphericalangle DBZ$ auf der Hälfte (AD) der Summe der beiden Bogen (d. h. des Bogens ABG) und $\sphericalangle ZAD$ auf dem Bogen DB von der andern Hälfte (DG), also bleibt für $\sphericalangle ZDA$ der Bogen, der DB zur Hälfte er-

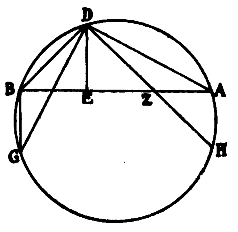


Fig. 1.

gänzt, d. h. der Bogen BG, aber $\sphericalangle ZDA$ *steht auf dem Bogen AH, also ist Bogen* $AH =$ *Bogen BG, also auch* $\sphericalangle BDG = \sphericalangle ZDA$*, mithin sind die Dreiecke BDG und ZDA ähnlich und gleich, also* $AZ = BG$*, aber* $EZ = EB$*, also ist* $AZ + EZ = EB + BG$*, w. z. b. w.*

. . . .

DIE ZWEITE BEHAUPTUNG.

Wenn in einen Kreisbogen eine gebrochene Linie gelegt wird, die den Bogen halbiert, hierauf in denselben Bogen eine zweite gebrochene Linie, die den Bogen in zwei ungleiche Teile teilt, so ist das Produkt des einen Teils der den Bogen halbierenden Linie in den andern gleich dem Produkt des einen Teiles der den Bogen in zwei verschiedene Teile teilenden Linie in den andern vermehrt um das Quadrat der Sehne, die zwischen den beiden Teilpunkten liegt. Z. B. der Bogen ABG (Fig. 2) enthalte die gebrochene Linie ABG, er werde halbiert im Punkte D, und in ihn die gleich gebrochene Linie ADG gelegt, so sage ich, daß $AD \cdot DG = AB \cdot BG + BD^2$.

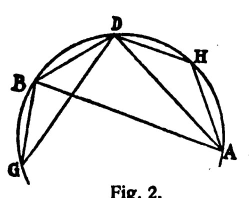


Fig. 2.

. . . .

BEWEIS DAZU VON MIR.

Ich sage: Wir ziehen DH parallel AB, ferner noch AH, AD, HB, BD. Weil nun Bogen $AD = DG$ *und Bogen* $AH = BD$*, so ist auch Bogen* $DH = BG$*, also sind auch ihre Sehnen gleich; weil nun AHDB ein Kreisviereck ist, so hat man* $AD \cdot BH = DH \cdot AB + AH \cdot BD$*; aber* $DH = BG$*, und* $AD = BH$ *und* $AH = BD$*, also ist auch* $AD^2 = AB \cdot BG + BD^2$ *w. z. b. w.*

. . . .

Zur ersten Behauptung gibt der gelehrte Verfasser 23 Beweise, von denen 4 von ihm selbst herrühren; die zweite Behauptung wird durch 9 Beweise bekräftigt, unter denen 4 eigne sind.

. . . .

AUFFINDUNG DER SEHNE DER ERGÄNZUNG JEDES BOGENS ZUM HALBKREIS, WENN DIE SEHNE DIESES BOGENS GEGEBEN IST, VON MIR.

Wenn die Sehne des Bogens bekannt ist, so ist auch die Sehne seiner Ergänzung zum Halbkreis bekannt. Z. B.: Es sei (Fig. 3) die Sehne BG bekannt, der Durchmesser des Kreises sei AB und auch bekannt, so sage ich, daß auch AG bekannt ist. Zum Beweise dessen halbieren wir den Bogen ABG im Punkte D und ziehen DE senkrecht auf AB, und DT senkrecht auf AG; nach dem was wir in der Aufgabe über den Holzstab bewiesen haben, halbiert die Senkrechte DHT die Sehne AG, da sie vom Mittelpunkte D des Bogens ausgeht, und H der Mittelpunkt des Kreises ist; ferner sind nun die ähnlichen Dreiecke HDE und HAT auch kongruent, also ist DE = AT, und weil DE senkrecht auf AB, besteht die Proportion: AE, d. h. $\frac{AB + BG}{2} : DE = DE : EB$, *d. h.* $\frac{AB - BG}{2}$, *also ist DE oder AT, das gleich der Hälfte der gesuchten Sehne ist, bekannt, q. e. d.*

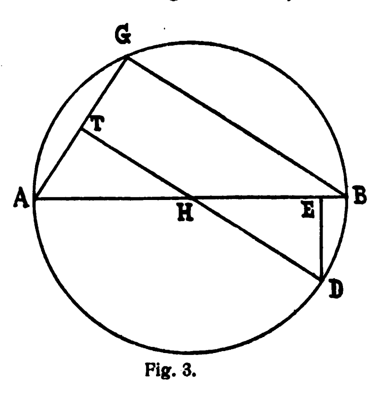


Fig. 3.

Die Berechnung auf diesem Wege ist, trotzdem sie länger ist, leichter, als wenn man das Quadrat der Sehne BG vom Quadrat von AB abzieht und aus der Differenz die Wurzel zieht, denn hier addieren wir den Durchmesser und die gegebene Sehne und multiplizieren die Hälfte dieser Summe mit dem Unterschiede zwischen dem Durchmesser und dieser Hälfte, und ziehen die Wurzel aus dem Produkte und verdoppeln sie, so haben wir die Sehne des Ergänzungsbogens des gegebenen.

Die „Holzstab“-Aufgabe setzt einen senkrecht in den Boden gesteckten Stab von bekannter Länge voraus, der unterhalb seines Mittelpunktes umgebrochen ist, so daß seine Spitze den Boden berührt. Man mißt den Abstand zwischen

Fußpunkt und Spitze und soll nun die Knickstelle finden. — Die Bemerkung des zweiten Absatzes rechtfertigt sich dadurch, daß Multiplikationen im Sexagesimalsysteme recht unbequem sind. (Vgl. S. 21; vgl. auch Division S. 9.)

Bemerkt sei noch, daß der Übersetzer die umständliche Ausdrucksweise des Verfassers in die moderne mathematische Zeichensprache übertragen hat.

DAS BUCH DER FLÄCHENINHALTE (LIBER EMBADORUM) DES ABRAHAM BAR CHIJJA SAVASORDA (12. JAHRH.).

Aus der lateinischen Übersetzung des Plato von Tivoli ins Deutsche übertragen von M. Curtze, Abh. z. Gesch. d. Math. Wiss. Heft XII.

AUS DEM ZWEITEN KAPITEL.

8. *Zunächst sei folgende Aufgabe gegeben: Wie groß ist die Länge der Diagonale eines Quadrates, in dessen Länge und Breite* 10 *Ellen enthalten sind? Die Antwort darauf ist: Die Diagonale dieses Quadrates ist* $\sqrt{200}$. *Vervielfacht man nämlich eine Diagonale mit sich selbst, so entsteht* 200. *Nun ist in jedem Quadrate das über der Diagonale beschriebene Quadrat doppelt so groß als das gegebene Quadrat. Es ist daher offenbar* $\sqrt{200}$ *die Länge der ganzen Diagonale, da* 200 *das doppelte Produkt von* 10 *mal* 10 *ist.*

9. *Wird aber umgekehrt gefragt: Wieviel Ellen enthält die Seite des Quadrates, dessen Diagonale gleich der Wurzel aus* 200 *ist? so findet man durch Halbierung des Diagonalquadrates* 100, *und daraus die Wurzel, nämlich* 10, *ist die Seite des Quadrates.*

Die Diagonale des Quadrates enthält aber 14 Ellen und eine Kleinigkeit weniger als ein Siebentel einer Elle.[1])

10. *Wird ebenso folgende Frage gestellt: Wenn von dem Inhalte eines Quadrates, von dessen Fläche man die Summe seiner sämtlichen Seiten weggenommen hat,* 21 *übrigbleiben, wieviel Quadratellen enthält*

1) Zeige, daß dies nach der Regel $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$ gerechnet ist.

es dann und wieviel Ellen sind zugleich in jeder Seite des Quadrates enthalten? so sei zu folgender Antwort bereit:

Wenn man nämlich die Zahl der Seiten, das ist 4, halbiert, so erhält man 2, und das mit sich selbst multipliziert ergibt 4. Addiert man hierzu 21, nämlich das, was vom Flächeninhalt übrigblieb, so entsteht 25. Hiervon sucht man die Wurzel und findet 5. Addiert man hierzu die halbe Zahl der Seiten, das ist 2, so macht das 7, und das ist die Seite des Quadrats, dessen Flächeninhalt 49 Quadratellen erfüllen. Der Frager aber vermindere diese Fläche, nämlich 49, um seine vier Seiten, von denen jede 7, alle zusammen also 28 betragen, und es blieben dann 21 übrig, wie er angab.

Will man aber die Richtigkeit der Antwort bewiesen wissen, so zeichne man das obenerwähnte Quadrat und bezeichne es mit ABCD. Alle seine Seiten sind dann einander gleich, und es ist klar, daß in einer jeden mehr als 4 Ellen enthalten sein müssen, weil der Fragesteller angibt, daß nach Wegnahme der Seiten von der Fläche etwas übrigbleiben soll. Deshalb schneiden wir von der Linie AB die Linie BE, von der Linie CD aber die Linie CF, jede von 4 Ellen Länge, ab, ziehen dann vom Punkte E nach dem Punkte F eine gerade Linie und halbieren darauf die Linie BE im Punkte G, dann sind also die Strecken BG, GE einander gleich, denn jede enthält 2 Ellen. Damit ist also deutlich bewiesen, daß in diesem Quadrat das Viereck BCFE die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen enthält. Dieses Viereck ist ja das Produkt aus der Linie BE, das sind 4 Ellen, mit der Linie BC, die die Seite des Quadrats darstellt, d.h. derjenigen Seite, die viermal gezählt die Summe der vier Seiten hervorbringt. Das Viereck BCFE enthält also die vier Seiten des Quadrates zusammengenommen. Zieht man nun dies Viereck von dem vorgenannten Quadrate ab, so bleibt das Viereck ADFE von 21 Quadratellen übrig, das ist die Größe, die in der Aufgabe als Rest bezeichnet wurde.

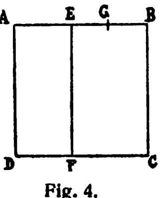


Fig. 4.

Die Gerade BE ist also in zwei gleiche Teile, nämlich BG, GE geteilt, und sie ist um eine andere Gerade EA verlängert. Wenn aber eine gerade Linie halbiert wird und sie

wird um eine gerade Linie verlängert, so ist das Rechteck, das aus der ganzen Linie zusammen mit der Verlängerung und aus der Verlängerung gebildet wird, zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte der Linie gleich dem Quadrat über der Hälfte, vermehrt um die Verlängerung. Es ist also das Produkt aus der Linie BA und der Linie EA, vermehrt um das Produkt aus der Linie GE, mit sich selbst gleich dem Produkt der Linie GA mit sich selbst. Das Quadrat der Geraden AB mit der Geraden EA ist das Viereck ADFE, weil die eine Seite AD der Quadratseite gleich ist, die andere Seite EA aber die Verlängerung der Seite EB, und die Fläche dieses Vierecks ist 21. *Addiert man hierzu das Produkt der Linie EG mit sich selbst, das ist* 4, *so entstehen* 25, *und das ist dem Produkt der Linie GA mit sich selbst gleich. Die Linie GA ist also* 5, *nämlich die Wurzel aus* 25. *Vereinigen wir nun mit dieser* 5 *den Wert der Linie BG, der* 2 *beträgt, so macht die Summe* 7, *und das ist die Länge der Linie BA. Der Flächeninhalt von ABCD aber beträgt* 49, *wie es die gegebene Figur darstellt.*[1])

AUS DEM RECHENBUCH DES ABÛ ZAKARÎJÂ EL-ḤAṢṢÂR (12. JAHRH.).

Aus dem Arabischen übersetzt von Heinrich Suter in Zürich. Bibl. Math. 3. Folge, Bd. 2.

... Wisse, daß es zwölf Zahlennamen[2]) *gibt; der erste ist die Eins, welche der Ursprung und der Anfang der Zahl ist; füge hierauf zu der Eins wieder Eins hinzu, so entsteht die Zwei, dieses ist die erste Zahl, denn die Eins ist keine Zahl, die Zwei ist die erste Zusammensetzung; hierauf füge zu der Zwei wieder Eins hinzu, so wird diese Zahl Drei genannt ...*

Über die Addition der Vermögen. Wenn zu dir gesagt wird, es gibt ein gewisses Vermögen, addiere seinen dritten Teil zu seinem vierten, so erhälst du 21 *Dirhem. Die Auflösung ist folgende:* 3 *und* 4 *sind in* 12 *enthalten, du*

1) Behandle die Aufgabe nach den Worten des Textes algebraisch!
2) Die Namen der Ziffern 1 bis 9 und die Zahlen 10, 100, 1000, aus denen alle Zahlennamen gebildet werden.

nimmst nun $\frac{1}{3}$ *von* 12 *und* $\frac{1}{4}$ *von* 12 *und addierst dies, so hast du* 7; *nun ist das Verhältnis von* 7 *zu* 12 *dasselbe wie das Verhältnis von* 21 *zu dem gesuchten Vermögen; multipliziere also* 12 *mit* 21 *und dividiere das Produkt durch* 7, *so hast du* 36, *und dies ist das Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit der Algebra lösen: Setze das Vermögen gleich einem Ding*[1]), *dann nimmst du* $\frac{1}{3}$ *und* $\frac{1}{4}$ *des Dinges und dies ist gleich* 21; *nun frägst du, mit wieviel muß ich* $\frac{3}{6}$ *und die Hälfte eines Sechstels des Dinges wiederherstellen*[2]), *damit das Ding selbst herauskommt? Du findest, daß du mit* $1\frac{5}{7}$ *multiplizieren mußt, wie wir dies im Kapitel über die Wiederherstellung der Brüche beweisen werden; multipliziere also auch* 21 *mit* $1\frac{5}{7}$, *dies gibt* 36, *und dies ist das Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit Hilfe der Wagschalen lösen. Dies Verfahren besteht darin, daß du für eine der Wagschalen irgendeine beliebige Zahl wählst, also z. B. die Zahl* 3; *nimm nun ihr Drittel und ihr Viertel, dies macht zusammen* $1\frac{3}{4}$, *vergleichst du dies mit* 21, *so findest du, daß in der Wagschale der Drei* $19\frac{1}{4}$ *fehlen; behalte nun diesen Fehler im Gedächtnis und wähle für die zweite Wagschale irgendeine Zahl, z. B.* 4, *nimm ihr Drittel und ihr Viertel, dies macht zusammen* $2\frac{1}{3}$; *vergleichst du dieses mit* 21, *so findest du, daß in der Wagschale der Vier* $18\frac{2}{3}$ *fehlen; nun multipliziere den Fehler der ersten Wagschale, also* $19\frac{1}{4}$, *mit der Zahl der zweiten Wagschale, also mit* 4, *dies gibt* 77, *dann multipliziere den Fehler der zweiten Wagschale, also* $18\frac{2}{3}$, *mit*

---

1) Ding = Unbekannte, vgl. S. 25.
2) Wiederherstellung (= el ǧebr = Algebra, vgl. S. 23, Anm. 2) bedeutet die Multiplikation eines Bruches mit seinem Reziprokum, so daß also 1 herauskommt.

der Zahl der ersten Wagschale, also mit 3, *dies gibt* 56, *subtrahiere dies Ergebnis vom ersten, der Rest ist* 21, *subtrahiere auch den kleineren Fehler vom größeren, der Rest ist* $\frac{3}{6}$ *und die Hälfte eines Sechstels, dann teile* 21 *durch dieses, das Resultat ist* 36, *und dies ist das Vermögen. Ich werde diese Lösung beweisen an ihrem Orte, so Gott will.*

Die drei Methoden, mit denen die lineare Gleichung erledigt wird, sind: das Verfahren mit der angenommenen Zahl (hier 12), die algebraische Methode mit Einführung einer Unbekannten und endlich die Methode des doppelten falschen Ansatzes, oder des doppelten Fehlers, oder hier Methode der Wagschalen genannt. Algebraisch ist letztere Methode leicht einzusehen; denn ist die Gleichung

$$ax + b = 0,$$

also die allgemeine lineare Gleichung gegeben, so erhält man, wenn man zwei beliebige Zahlen p und q für x setzt, an Stelle von Null

$$ap + b \quad \text{und} \quad aq + b$$

als Fehler und man sieht durch Befolgung der oben gegebenen Regel das richtige Ergebnis entstehen:

$$x = \frac{(ap+b)q - (aq+b)p}{(ap+b)-(aq+b)} = \frac{b(q-p)}{a(p-q)} = -\frac{b}{a}.$$

EINE ARABISCHE SEXAGESIMALE DIVISION[1]) (15. JAHRH.).

Nach dem Französischen des Carra de Vaux. Bibl. math. 2. Folge Bd. 13. 1898.

Im Buche über die Rechnung mit Graden gibt Sibt el-Mâridini ein Beispiel einer Division (über sich), bei der eine „achtstellige" Periode entsteht. Es ist $47^{0}\,50^{I} : 1^{0}\,25^{I}$ und das sieht folgendermaßen aus:

1) Vgl. auch die sexagesimalen Rechnungen S. 21.

......

1, 3, 45
1, 5

43, 55
45

4, 15
5

9, 55
10

19, 50
20

39, 40
40

1, 19, 20
1, 20

1, 13, 40
1, 15

1, 3, 45
1, 5

46, 45

1, 25
47, 50

$33^{0}\ 45^{I}\ 52^{II}\ 56^{III}\ 28^{IV}\ 14^{V}\ 7^{VI}\ 3^{VII}\ 31^{VIII}\ 45^{IX}\ 52^{X} \ldots$

In dezimaler Schreibweise entspricht dies der Division

$$47\frac{5}{6} : 1\frac{5}{12} = 33\frac{13}{17} = 33,[76\ 47\ 0\ 5\ 88\ 23\ 5\ 29\ 4\ 11]$$

33^{0} bedeutet 33 Ganze, 45^{I} bedeutet $\frac{45}{60}$, 52^{II} bedeutet $\frac{52}{60^2}\cdots$,

so daß jenes Beispiel auch geschrieben werden kann:

$$47\frac{50}{60} : 1\frac{25}{60} = 33 + \frac{45}{60} + \frac{52}{60^2} + \frac{56}{60^3} + \frac{28}{60^4} + \frac{14}{60^5} + \frac{7}{60^6} + \frac{3}{60^7} + \frac{31}{60^8} + \frac{45}{60^9} + \frac{52}{60^{10}} + \cdots$$

LEONARDO DE ANTONIJS DE CREMONA, ABHANDLUNG ÜBER DIE PRAKTISCHE FELDMESSKUNST (UM 1400).

Handschrift in Folio aus der Göttinger Universitätsbibliothek. (Aus dem Italienischen übersetzt von M. Curtze in den Abh. zur Gesch. d. Math. Heft XIII, Leipzig 1902.)

Erster Traktat.

. . . .

VON DEM GNOMON DES ASTROLABS UND DES QUADRANTEN.

Es ist also zuerst zu merken, daß diejenige Seite des Gnomon oder des Quadrates auf dem Astrolab, welches von der Mittellinie des Himmels oder der Mitternacht beginnt, die Seite des rechten Schattens und diejenige Seite, die von dem Horizonte ihren Anfang nimmt, die Seite des verkehrten Schattens ist. Beim Quadranten aber ist diejenige Seite, welche an dem Rande beginnt, in welchem die Diopter sich befinden, die Seite des rechten Schattens, und die andere die Seite des verkehrten Schattens.

Ferner ist zu wissen, daß die beiden Seiten des Gnomon jede für sich in 12 Teile geteilt sind, so daß die Zahl 12 auf beiden Seiten in der Ecke sich befindet, in der diese zusammenkommen. — Jeder dieser zwölf Teile heißt ein Punkt des Schattens.

In eigentlicher Bedeutung ist der rechte Schatten derjenige Schatten, den ein auf dem Horizonte oder der Ober-

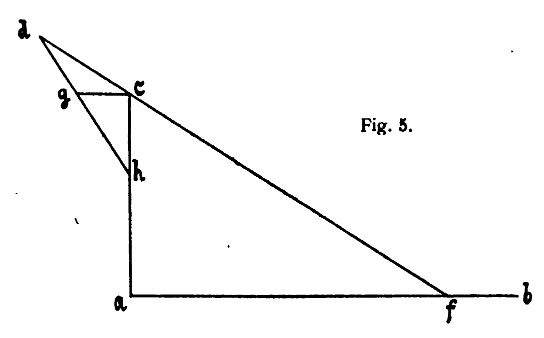


Fig. 5.

fläche der Erde senkrecht errichteter Gegenstand wirft. Wenn etwa ab den Horizont oder die Oberfläche der Erde bezeich-

net, ac den Turm und d die Sonne, so ist z. B. af der rechte Schatten. Der verkehrte Schatten ist dagegen derjenige, welchen ein Gegenstand wirft, der senkrecht oder unter rechten Winkeln in einem anderen Gegenstande befestigt ist, welcher selbst auf der Horizontalebene errichtet ist. Wie wenn in der Figur 5 die Gerade gc, die an der Geraden ac befestigt ist, den Schatten ch bewirkt, der dann der verkehrte Schatten genannt wird.

Hierbei gilt es nun als Regel, daß[1] je größer der rechte Schatten erscheint, um so kleiner der verkehrte Schatten ist, und umgekehrt. Da aber der rechte oder der verkehrte Schatten, wenn sie in der angegebenen Weise genommen werden, für Zwecke des Messens nicht gebraucht werden können, werde ich die dazu benutzten Schatten anderweitig erklären.

Zu diesem Zwecke ist also der rechte Schatten uneigentlich die Länge, welche kleiner oder gleich der Größe des Gegenstandes ist, welcher gemessen werden soll, wie z. B. in der Figur 6 die Gerade ap gleich der zu messenden Geraden ac diejenige ist, welche der rechte Schatten des Gegenstandes genannt wird. Der verkehrte Schatten aber ist die Länge größer als die Ausdehnung des zu messen-

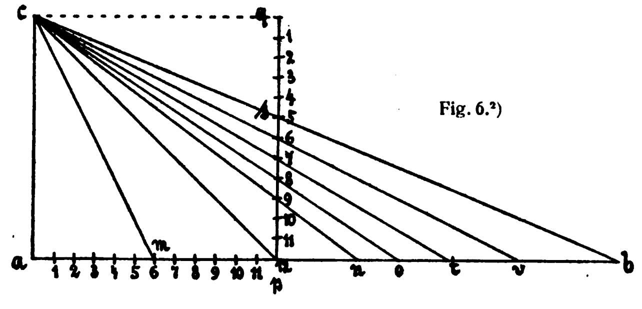


Fig. 6.[2])

den Gegenstandes, wie etwa die Gerade ab, welche den verkehrten Schatten darstellt. Bei dem rechten Schatten steht man also dem Gegenstande näher, als seine Höhe ist,

1) Vgl. Fig. 6.
2) Der Punkt *s* und die punktierte Gerade *cq* finden sich nicht bei Leonardo.

oder gleich weit ab; bei dem verkehrten Schatten steht man weiter ab.

. . . .

Nun verhält sich der auf der Geraden ab begrenzte Schatten zu der Geraden ac, wie sich die gerade Linie pq zu ihren Teilen verhält. Diese Schatten aber begrenzt die Sehlinie oder der Sonnenstrahl in der Art, wie die Geraden cm, cp, cn, co, ct, cv. Die auf solche Art genommenen Schatten heißen eigentlich nicht Schatten, sondern werden Abstände von dem zu messenden Gegenstande genannt, wenn sie auch in anderer Weise Schatten sind, wie dann, wenn die Sonne scheint und der Schatten auf die Erde geworfen wird.

Dies vorausgesetzt und vorausgeschickt, werde ich folgende Ordnung festhalten. Bei der Auflösung jeder Aufgabe nämlich werde ich zunächst das Astrolab oder den Quadranten benutzen, an zweiter Stelle Meßstangen, an dritter Spiegel.

. . . .

VIERTE AUFGABE.

Will man eine Höhe messen, an welche man nicht herangehen kann, so visiere man zunächst mit beiden vorgenannten Instrumenten die Spitze des Turmes durch beide Diopter des Astrolabs oder des Quadranten, und merke zugleich die Zahl der Punkte sowie ebenfalls den Punkt, auf welchen das Bleilot fällt, das im Mittelpunkte des Astrolabs oder des Quadranten befestigt ist. Darauf tue man dasselbe in einem anderen Punkte und bestimme den Abstand der beiden Stationen und die Differenz der Punkte. In betreff der Punkte beachte man aber, daß, wenn man Punkte des verkehrten Schattens beobachtet, man 144 durch die beobachtete Zahl der Punkte dividieren muß. Daraufhin vervielfache man den Abstand der beiden Stationen mit 12, und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der Punkte, so erhält man die Höhe des Turmes. Es sei z. B. der Turm ab. Wenn man im Punkte c steht, findet man 10 Punkte des rechten Schattens, und steht man im Punkte d, so hat man 9 Punkte des verkehrten Schattens. Durch diese 9 Punkte teile man 144, so erhält man 16 Punkte. Zieht man

davon die 10, die man im Punkte c gefunden hat, ab, so bleiben 6 Punkte übrig. Nun multipliziere man die Zahl der Fuße, die zwischen c und d enthalten sind, das ist 20, mit 12, so ist das 240. Das muß man durch die 6 Punkte dividieren, die man sich gemerkt hat, und erhält 40 Fuß. Hierzu füge man die Höhe des Mittelpunktes des Astrolabs, oder des Quadranten über der Erde hinzu, so erhält man damit die Höhe des Turmes, wie in der Figur zu sehen.

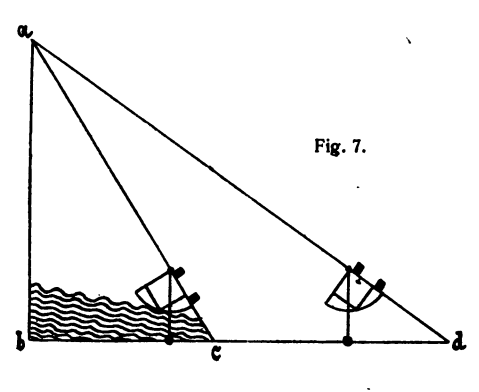


Fig. 7.

Dasselbe vollführt man vermittelst des Stangeninstrumentes oder mit der Tafel, wenn man, wie oben gesagt, an zwei Orten sich aufstellt, nämlich in c und in d, da man hierdurch verschiedene Punkte erhält, und man verfährt in allem so, wie es oben gesagt ist.

. . . .

Das Nämliche kann man mit einer Stange ausführen. Diese Stange sei ce im Punkte e, das Auge sei d. Dieselbe Stange befinde sich darauf im Punkte h, es sei die gh, und das Auge sei j. Es ist dann klar, daß, wenn die Gerade jk, die die Statur des Messenden darstellt, weiter absteht, d. h. weiter von der Stange gh entfernt ist, als die Gerade df, daß dann die Gestalt des Messenden weiter von der Stange gh absteht, als df von der Stange ce. Es sei nun dieser Überschuß, d. i. die Differenz, qj. Man multipliziere den Abstand der Augen, d. i. die Gerade dj, mit der Länge der Stange, die gleich qn ist, und das Ergebnis müssen

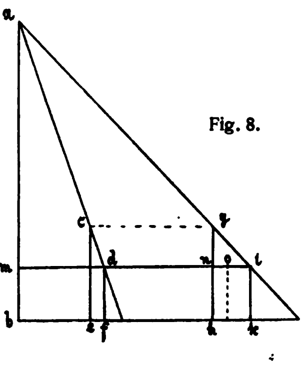


Fig. 8.

wir durch die Differenz zwischen den Abständen der Augen dividieren, d. i. durch die Länge oj. Zu dem Ergebnisse füge man den Rest der Länge der Stange hinzu, nämlich die Strecke nh, d. i. die Statur des Messenden vom Auge bis zur Erde, und erhält dadurch die Höhe des Turmes, wie in der Figur 8 zu sehen ist.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen, indem man zuerst die Spitze des Turmes in dem Spiegel einvisiert, den man im Punkte a aufgestellt hat, so daß das Auge in f ist, und die Statur des Messenden fc; zu zweit, indem man die nämliche Spitze des Turmes in dem Spiegel einvisiert, der im Punkte b niedergelegt ist, so daß das Auge in d ist und die Statur des Menschen ed. Es ist klar, daß der zweite Abstand zwischen dir und dem Spiegel größer ist als der erste; dieser Unterschied sei dh. Multipliziert man nun den Abstand zwischen dir und dem Spiegel mit deiner Statur, d. h. vervielfacht man ab mit fc, und teilt das Resultat durch den Unterschied, nämlich durch die Differenz zwischen der größeren Entfernung vom Spiegel und der kleineren, also durch dh, so erhält man die Höhe des Turmes, wie die Figur 9 zeigt. Auf die nämliche Art erhält man die Höhe eines Berges und die eines Turmes, der auf dem Berge steht.

Fig. 9.

Gnomon (griech. = Schattenzeiger), ursprünglich ein schon in vorhistorischer Zeit bei den Ägyptern benutzter vertikaler Stab, durch dessen Schatten die Mittagslinie bestimmt wurde. Später verstand man darunter allgemein eine Senkrechte; oder auch einen aus Holz oder anderem Material hergestellten rechten Winkel, wie er als Hilfsmittel zum Zeichnen Verwendung findet; oder auch eine Figur, die von einem Quadrate übrig bleibt, wenn man eine Ecke quadratförmig wegschneidet (vgl. S. 55). Dem entsprechend sind in unserer

Abhandlung unter Gnomon die zwei mit Zwölfteilung versehenen Nachbarseiten eines Quadrates zu verstehen, mit deren Hilfe Winkelmessungen vorgenommen werden. Die Winkel werden aber nicht nach Graden oder nach Bogenmaß ermittelt, sondern es werden unmittelbar ihre Cotangente (rechter Schatten), bzw. ihre Tangente (verkehrter Schatten) abgelesen. Astrolabium (griech. = Sternfesthalter), ursprünglich ein am Durchmesser mit Dioptern versehener, in Grade eingeteilter Halbkreis, um dessen Mittelpunkt ein auch mit Dioptern versehenes Lineal drehbar war. Später allgemein für die meisten mit Kreisteilungen versehenen Meßinstrumente gebraucht. Bei Leonardo umfaßte nach den Zeichnungen das Astrolab nur einen Quadranten, auf dem ein zum Quadrate ergänzter Gnomon aufgezeichnet war (s. Fig. 7).

Für die bei Fig. 6 angestellten Betrachtungen beachte die Proportion:

$$cq:qs = ab:ac, \quad \text{oder, da } pq = cq \,(= ac) \text{ ist,}$$

$$pq:qs = ab:ac \quad \text{und} \quad \frac{pq^2}{qs} = ab \quad \text{oder} \quad \frac{144}{qs} = ab.$$

Unter „Teilen" der Geraden pq, später auch unter „beobachtete Zahl der Punkte" sind die von q (bzw. von a) aus auf pq gemessene Strecken zu verstehen.

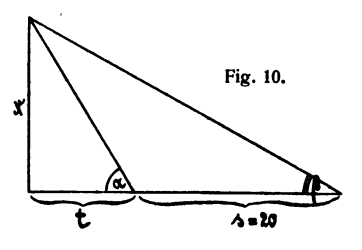


Fig. 10.

Die erste Lösung der „Vierten Aufgabe" verläuft nach unserer Schreibweise folgendermaßen (Fig. 10):

$$\cot\alpha = \frac{10}{12} \qquad \tan\beta = \frac{9}{12}$$

$$\begin{array}{rl|l} t = & x \cdot \cot\alpha & - \\ t + s = & \dfrac{x}{\tan\beta} & + \end{array}$$

$$x = \frac{s \cdot 12}{\left(\frac{1}{\tan\beta} - \cot\alpha\right) \cdot 12} = \frac{20 \cdot 12}{\frac{144}{9} - 10} = 40.$$

Der letzte Zahlenausdruck verlangt wörtlich die von Leonardo gegebene Rechnung. –

Das für die zweite Lösung empfohlene „Stangeninstrument“ besteht aus zwei in je 12 gleiche Teile geteilten, gleichlangen Stangen, deren eine horizontal, deren andere vertikal so angebracht ist, daß man auch unterhalb der horizontalen Stange *bc* beobachten kann. Man visiert nun entweder von *c* aus über *ab* oder von unterhalb *bc* über *a* hinweg, je nachdem das Ziel mehr oder weniger Höhe als 45⁰ hat. Ein je nach Bedarf in *a* oder in *c* drehbar aufsteckbares Visierlineal läßt den Teilpunkt auf dem gegenüberliegenden Schenkel ablesen, gestattet also die Tangente bzw. Cotangente eines Elevationswinkels zu ermitteln.

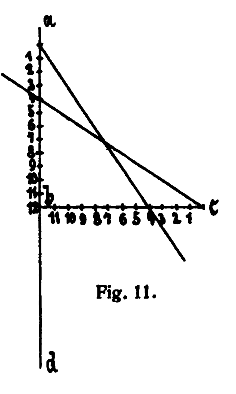


Fig. 11.

Die weiterhin erwähnte „Tafel“ ist ein quadratisches Brett, dessen zwei benachbarte Seiten *ad* und *de* wieder in je 12 Teile geteilt sind, d. h. einen Gnomon darstellen. Hier braucht nur in *c* eine Alhidade mit Visiervorrichtung drehbar angebracht zu sein. Natürlich lassen sich auch mit diesem einfachen Instrumente unmittelbar die Funktionen Tangens und Cotangens eines Elevationswinkels finden.

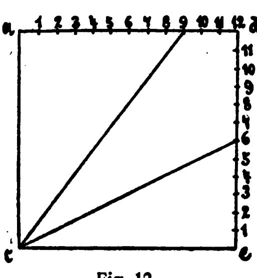


Fig. 12.

Das weitere Verfahren zur Berechnung der Turmhöhe kann der Leser leicht selbst ermitteln.

ZWEITFR TEIL DES ZWEITEN TRAKTATES.

Es bleibt mir noch übrig vom Kreise zu sprechen. Für ihn werde ich vier Aufgaben stellen.

Erste Aufgabe. Will man zuerst aus dem Durchmesser den Umfang erhalten, so vervielfache man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ *des Durchmessers. Enthält z. B. der Durchmesser des Kreises ai 7 Teile, so*

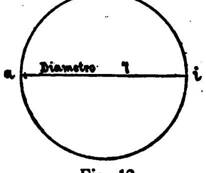


Fig. 13.

erhält man durch Multiplikation desselben mit $3\frac{1}{7}$ *den Umfang zu* 22 *Teilen. (Fig. 13.)*

Zweite Aufgabe. Wünscht man die Fläche des Kreises oder den Raum zu finden innerhalb des Umfanges, den man Kreisinhalt nennt, so multipliziere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfanges. In dem vorgelegten Beispiele also multipliziere man 11 *mit* $3\frac{1}{2}$, *dann erhält man* $38\frac{1}{2}$, *und soviel enthält der genannte Kreis von den Quadraten, welche über den einzelnen Teilen des Durchmessers gezeichnet sind, wie in nebenstehender Figur (Fig. 14).*

Daraus ersieht man auch, um wieviel das über dem Durchmesser errichtete Quadrat den Kreis übertrifft. Da dieses Quadrat 49 *ist, der Kreis* $38\frac{1}{2}$, *so ist der Überschuß gleich* $10\frac{1}{2}$.

Oder man findet den Kreisinhalt viel leichter auf folgende Weise. Man multipliziere nämlich das Quadrat des Halbmessers mit $3\frac{1}{7}$.

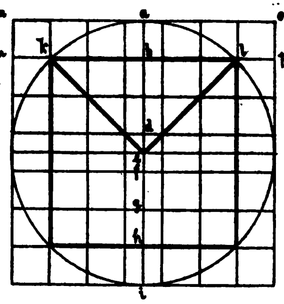


Fig. 14.

Dritte Aufgabe. Will man die Größe eines Kreisabschnittes kleiner als der Halbkreis finden, so multipliziere man den Bogen des Abschnittes mit der Größe der ganzen Kreisfläche und dividiere das Produkt durch die Länge des ganzen Umfanges. Von der Zahl, welche durch diese Division entsteht, ziehe man dann den Inhalt des Dreieckes ab, das durch die beiden Halbmesser des gegebenen Kreises und durch die Sehne des Abschnittes gebildet wird. Es sei z. B. der Abschnitt, dessen Größe man berechnen will, kal (Fig. 14); der zugehörige Bogen sei $5\frac{1}{2}$. *Ihn multipliziere man mit* $38\frac{1}{2}$, *so erhält man* $211\frac{3}{4}$. *Dieses durch* 22 *dividiert, ergibt* $9^{p}\,37'\,30''$; *dies verwahre man. Hiervon, sagte ich, müsse man den Dreiecksinhalt abziehen, den man so erhält. Da* $5\frac{1}{2}$ *der vierte Teil des Kreises ist, so ist* $2\frac{3}{4}$

der achte Teil, weil in unserem Beispiele der ganze Umfang gleich 22 ist. Nun gehe man also mit dem achten Teile von 360°, das ist mit 45° in die Tafel der Sinus ein, und entnehme ihr seinen Sinus rectus. Derselbe ist 42ᵖ 25′ 35″. Ihn multipliziere man mit $3\frac{1}{2}$*, das ist mit dem Halbmesser, und teile das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade bk = 2ᵖ 28′ 30″. Da für unseren Fall die Gerade eb gleich der Geraden bk ist, so haben wir damit die Gerade eb, das ist die Höhe des Dreiecks. Man multipliziere also die Gerade bk mit der Geraden eb, so hat man den Inhalt des Dreiecks, den man sucht, gemäß der Lehre der ersten Aufgabe des vorhergehenden Teiles. Dieser Inhalt ist 6ᵖ 7′ 32″. Nun ziehe man dies von dem Gemerkten ab, nämlich von 9ᵖ 37′ 30″, dann bleiben 3ᵖ 29′ 58″, das ist die Größe des Abschnittes, den man suchte.*

In anderen Fällen aber, wenn der Bogen des Abschnitts nicht genau den vierten Teil des Kreises ausmacht, sondern mehr oder weniger, dann gehe man zur Ermittelung der Geraden bk so vor, wie ich es eben gesagt habe. Da, wenn der Bogen des Abschnittes gleich 4 ist, diesem im Verhältnis zum ganzen Umfange, der 22 beträgt, 65ᵖ 27′ 26″ entsprechen, wenn der ganze Kreis 360°, und da man zur Bestimmung des Sinus des Bogens des vorgelegten Kreisabschnittes mit der Hälfte von 65ᵖ 27′ 26″ in die Sinustafel einzugehen hat, so gehe man in diese mit 32ᵖ 43′ 38″ ein, und findet dann in der nämlichen Zeile 32ᵖ 26′ 17″. Das vervielfache man mit $3\frac{1}{2}$*, wie oben, dividiere das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade bk, die gleich 1ᵖ 53′ 32″ ist. Zur Bestimmung der Geraden ab aber gehe man so vor. Man ziehe den Bogen, mit welchem man in die Sinustafel einging, also 32ᵖ 43′ 38″ von 90ᵖ ab, und gehe mit dem Reste, d. i. mit 57ᵖ 16′ 22″, wieder in die Sinustafel ein, dann findet man in derselben Zeile 50ᵖ 28′ 29″. Das multipliziere man mit* $3\frac{1}{2}$ *und teile das Ergebnis durch 60, wie oben, so erhält man die Gerade eb = 2ᵖ 56′ 39″. So hat man also gefunden, daß die Gerade bk = 1ᵖ 53′ 32″ und die Gerade eb = 2ᵖ 56′ 39″ ist, wenn der Durchmesser des Kreises 7 beträgt.*

Wenn man ferner den Betrag des kleineren Abschnittes, den man eben gefunden hat, von dem ganzen Kreisinhalt wegnimmt, so bleibt der Inhalt des größeren Kreisabschnittes übrig.

Durch diese Betrachtung erkennt man auch, um wieviel das von dem Pfeil des Kreisabschnittes und dem Durchmesser gebildete Rechteck besagten Abschnitt übertrifft. Pfeil und Sinus versus sind ein und dasselbe. Da nun im ersten Beispiele dieser Pfeil, das ist ab, gleich $1^p\,1'\,29''$ *ist, so erhält man durch Multiplikation desselben mit* 7 $7^p\,10'\,23''$*, das ist der Gesamtinhalt des Rechtecks mnbapo. Es übertrifft also den genannten Abschnitt um* $3^p\,40'\,45''$.

Vierte Aufgabe. Kennt man das Verhältnis zweier Kreisinhalte und wünscht des Verhältnis der Durchmesser zu erhalten, so suche man die Quadratwurzel des Verhältnisses genannter Kreisinhalte. Wenn z. B. der eine den anderen 16 *mal übertrifft, d. h. wenn der eine in dem anderen* 16 *mal enthalten ist, so übertrifft der Durchmesser des großen den des kleineren viermal, d. h. er wird einen viermal so großen Durchmesser besitzen als der andere.*

. . . .

Statt *p* (partes) steht in der Urschrift überall ° (Grad).

[Folgt ein Traktat über Ausmessung des dreiseitigen Prismas, der „eckigen und runden Säule“, der Pyramide, des Pyramidenstumpfes, des Fasses, des Würfels und der Kugel. Dann findet sich folgender Schlußabschnitt:]

O du, der du dieses Werk liesest, wirst erkennen, daß ich vieles gelehrt habe, was von anderen gesagt ist, und manche Behauptungen anderer verbessert, und manches mit Gottes Hilfe gesagt habe, indem ich bei Berechnung des Kreises darauf aufmerksam machte, daß das Verhältnis des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser nicht gleich 22:7 ist, obwohl ich, sowohl wegen der Leichtigkeit der Berechnung und auch, weil es nicht dieses Werkes ist, sie zu rektifizieren, dieses Verhältnis angegeben habe vorzüglich deshalb, weil es nicht sehr weit von der Wahrheit abweicht. Das richtige Verhältnis aber habe ich schon an einem anderen Orte gegeben durch einen fast vollständigen Beweis.

Gott sei Dank dargebracht. Amen.

Die zu den Rechnungen der dritten und vierten Aufgabe benutzten Zahlen sind nicht nach dem heute üblichen Dezimalsysteme, sondern nach dem Sexagesimalsysteme gebrochen. Es werde, da die durchgehende Bezeichnung $^{0}\,'\,''$ den Anfänger verwirren könnte, die Rechnung hier noch einmal übersichtlicher ausgeführt. Dabei werde die jedweder Zahl zugrundeliegende Einheit, die man gewöhnlich überhaupt nicht zu schreiben pflegt (z. B. 28 statt $28 \cdot 1$), mit ^{E} bezeichnet, ihre sexagesimalen Unterabteilungen aber mit $'$, $''$, $'''$ usw. Es bedeute also $5^{E}\,23'\,9''\,18'''\,47''''$ soviel als $5 + \frac{23}{60} + \frac{9}{60^2} + \frac{18}{60^3} + \frac{47}{60^4}$; man lese: 5 Einheiten, 23 Minuten, 9 Sekunden, 18 Tertien, 47 Quarten. Unsere heutige Winkel- und Zeitrechnung erfolgt ja noch nach demselben Grundsatze.

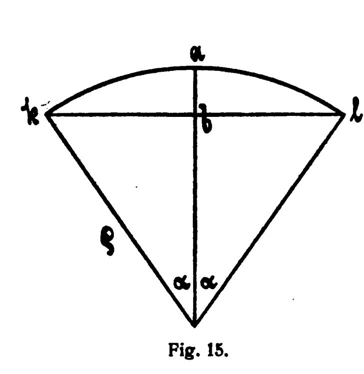


Fig. 15.

In den beiden ersten Aufgaben wird folgendes festgestellt:

Gegeben:

$\pi = \frac{22}{7}$, Durchmesser $2\rho = 7^{E}$.

[Streng genommen müßte hier noch ein Längenmaß hinzugefügt werden, etwa cm, wie auch später bei Flächen noch das entsprechende Flächenmaß, also analog cm².]

$$\text{Kreisumfang} = 7 \cdot \frac{22}{7} = 22^{E}$$

$$\text{Kreisfläche} = (3^1/_2)^2 \cdot \pi = 38^1/_2{}^{E}$$

$$\text{Kreissektor} = \frac{\text{Bogen} \cdot \text{Kreisfläche}}{\text{Kreisumfang}} = \frac{2\rho\pi \cdot 2\alpha}{360} \cdot \frac{\rho^2\pi}{2\rho\pi} = \frac{\rho^2\pi\alpha}{180} = \frac{77}{360}\alpha$$

$$\text{Kreissegment} = \rho^2\pi \cdot \frac{\alpha}{180} - \rho^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{77\alpha}{360} - \frac{49}{4}\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Ist nun zunächst [Dritte Aufgabe I. Teil] $\alpha = 45^0$ angenommen, also der Sektor speziell ein Quadrant, so wird:

$$\text{Quadrant} = \frac{77}{360} \cdot 45 = 77:8 = 9^E\ 37'\ 30''$$

$$\begin{array}{r} \underline{5 \cdot 60} \\ 300:8 \\ \underline{4 \cdot 60} \\ 240:8 \end{array}$$

Zur Berechnung des Δkle braucht man den Sinus; man findet in den heute gebräuchlichen Tabellen

$$\sin \alpha = \sin 45^0 = 0{,}70711^E$$

Leonardo aber setzt nach damaligem Gebrauche den Radius des Einheitskreises gleich 60 Einheiten (^{e}) und teilt wieder sexagesimal; daher:

$$\sin 45^0 = \left.\begin{array}{r} \underline{0{,}70711} \cdot 60 \\ 42{,}4266 \\ \underline{0{,}4266} \cdot 60 \\ 25{,}596 \\ \underline{0{,}596} \cdot 60 \\ 35{,}\cdot\cdot \end{array}\right\} = 42^e\ 25'\ 35'',$$

was Leonardo natürlich unmittelbar aus seinen Tabellen entnimmt.

Also:

$$\text{Segment} = 9^E\ 37'\ 30'' - \frac{49}{4} \cdot 42^e\ 25'\ 35'' \cdot 42^e\ 25'\ 35''$$

$$= 9^E\ 37'\ 30'' - \cdot \frac{49}{4} \cdot \frac{42^E\ 25'\ 35''}{60} \cdot \frac{42^E\ 25'\ 35''}{60}$$

$$= 9^E\ 37'\ 30'' - \left(\frac{7 \cdot 42^E\ 25'\ 35''}{120}\right)^2$$

$$\left(\frac{7 \cdot 42^E\ 25'\ 35''}{120}\right)^2 = \begin{array}{lllll} \underline{2^E\ 28'} & \underline{30''} \cdot 2^E\ 28'\ 30' & & & \\ 4^E\ 56' & 60'' & & & \\ & 56'\ 784'' & 840''' & & \\ & \underline{\quad 60''} & \underline{840'''} & \underline{900''''} & \\ 4^E\ 112' & 904'' & 1680''' & 900'''' & \\ 6^E\quad 7' & 34'' & (15''') & & \end{array}$$

bei Leonardo $6^E\ 7'\ 32''$

Folglich das Segment $= 9^E\ 37'\ 30'' - 6^E\ 7'\ 34'' = 3^E\ 29'\ 56''$ (bezw. $3^E\ 29'\ 58''$).

Ganz entsprechend verläuft die Rechnung im zweiten Falle der dritten Aufgabe.[1])

Zum letzten Abschnitte der dritten Aufgabe sei noch bemerkt, daß Pfeil (sagitta), der größte Abstand zwischen Bogen und Sehne, offenbar zugleich sinus versus, d. h. $1-\cos\alpha$ ist, wenn der Kreis als Einheitskreis angesehen wird. „sinus rectus“ (S. 18) ist unser „sinus“. —

Zur vierten Aufgabe:

$$\text{Gegeben } J_1 : J_2 = d_1^2 : d_2^2, \text{ folglich } d_1 : d_2 = \sqrt{J_1} : \sqrt{J_2}$$

Die Arbeit, in der Leonardo, wie er in dem Schlußsatze sagt, einen „fast vollständigen Beweis“ für den wahren Wert der Zahl π gefunden haben will, ist vermutlich vollständig verschollen. An anderer Stelle der vorliegenden Arbeit findet sich übrigens der seltsame Wert $3\frac{39831}{282296}$, der dem Dezimalbruche 3,14109 entspricht.

Aus einer Algebra-Handschrift von 1461.

(Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im 15. Jahrhundert von Maximilian Curtze. Abh. zur Gesch. der Mathematik. Heft 7. Leipzig 1895.)

Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet dise Wort: census, radix, numerus. Census ist ain yede zal, die in sich selb multiplicirt wirt, daz ist numerus quadratus. Radix ist die wurcz der zal oder dez zins. Numerus ist ain zal für sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurcz ist. Aus den dingen merkt er 6 ding: das erst, wann der census sich gelichet den wurczen; daz ander, so der census sich gelichet der zal; das drit, so sich dye zal gelichet den wurczen; das 4 so sich der census und die wurczen gelichent der zal, als ob man spreche: ein census vnd 10 wurcz gelichent sich 39; das funft ist, so sich der census und die Zahl gelichent den wurczen; das sechst, so sich die wurczen vnd die zal gelichent dem census.

---

1) Rechne die dort von Leonardo gegebenen Zahlenwerte selbst nach und entwirf eine genaue Figur (etwa $E = 2$ cm), in der die nacheinander gefundenen Längen nachzumessen sind.



Dar vmb sprech ainer: gib mir ain zensus vnd zuech darvon sin wurcz, vnd von dem, daz vberbelyb an dem census, zuech och ausz dye wurcz; die zwo wurcz tue zesamm, daz 2 zal dar-ausz werden. So aber daz nit in der sechs regel ainer stat, so bring es in ain regel also. Es sollen die zwo wurcz 2 numero gelich gesin, so kompt es in die dritten regel; dar vmb zuech ab von um 2 numero die wurczen dez census, so belyben 2 minder der wurczen desz zins, dasz selb belybend ist gelich der wurczen desz, dasz ain census uberbelybt sein wurcz darvon gezogen wurt, daz du aber habest des gelych, unsz daz uberbelybt, so multiplicir die 2 dragmas minder ainer wurczen in sich selb, so kommen 4 dragma und ain zins minder 4 wurczen, daz wurt gelich dem, daz uberbelybt an dem census, wann sein wurcz darvon wart gezogen. Nu zuech darvon dye gemindert wurcz, so belybt 1 census vnd 4 dragme gelich ain census vnd 3 wurcz. Nu tu baidenthalb den zins darvon, so belybt dennocht dasz ubrig gelich, dasz ist, 4 dragme sind gelych 3 wurczen. So musz ain wurcz $1\frac{1}{3}$ sein, wann 3mal $1\frac{1}{3}$ macht 4. Multiplicir $1\frac{1}{3}$ in sich selb, so kompt $\frac{16}{9}$, daz ist der census, vnd sein wurcz ist $1\frac{1}{3}$, vnd wann tue $1\frac{1}{3}$ tust von $\frac{16}{9}$, so belyb $\frac{4}{9}$; die wurcz von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{2}{3}$, die $\frac{2}{3}$ tue zu der wurczen $\frac{16}{9}$, daz ist $1\frac{1}{3}$, macht 2 gancz.

Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî hatte im ersten Viertel des 9. Jahrhunderts in arabischer Sprache außer einem Buche über das Rechnen[1]) ein Werk über Gleichungen geschrieben unter dem Titel Aldschebr walmukâbala[2]), in dem er die oben genannten sechs Arten Gleichungen unterscheidet, die wir in heutiger Schreibweise der Reihe nach folgendermaßen kennzeichnen:

$$1.\ ax^2 = bx,\quad 2.\ ax^2 = b,\quad 3.\ ax = c,\quad 4.\ x^2 + ax = b,$$
$$5.\ x^2 + a = bx,\quad 6.\ x^2 = ax + b.$$

1) Von dem Namen Alchwarizmî kommt die Bezeichnung Algorithmus für Rechenverfahren.
2) Hieraus ist die Bezeichnung Algebra für Gleichungslehre entstanden.

Das wird sofort verständlich, wenn man sich klar macht, daß man damals im Abendlande nur positive Zahlen kannte und infolgedessen auch nur Gleichungen mit positiven Gliedern behandelte. Die oben als Beispiel zu 4. angeführte Gleichung mit den rationalen Wurzeln $+3$, -13 ist

$$x^2 + 10x = 39.$$

Das andere Beispiel ist wesentlich komplizierter, besonders da hier auch negative Glieder auftreten. Es sind der Reihe nach gebildet:

$$x^2 - x, \quad \sqrt{x^2 - x}, \quad \sqrt{x^2 - x} + x,$$

und das soll gleich 2 sein; also entsteht die Gleichung

$$\sqrt{x^2 - x} + x = 2,$$

die nun so gelöst wird:

$$\sqrt{x^2 - x} = 2 - x,$$
$$4 + x^2 - 4x = x^2 - x,$$
$$x^2 + 4 = x^2 + 3x,$$
$$4 = 3x,$$
$$x = 1\frac{1}{3}.$$

Den Schluß bildet die Probe, die jeder leicht selbst anstellen kann.

Für jede der obigen sechs Gleichungsformen gab es eine bestimmte Regel zur Ermittelung der Wurzel. Es wird so auch klar, wie man dazu kam, den Wert der Unbekannten, der einer Gleichung genügt, deren Wurzel zu nennen. Einen besonderen Namen erhielt die Wurzel der Gleichung 4, wenn der Koeffizient a der Einheit gleich war:

$$x^2 + x = b;$$

man nannte sie Pronikwurzel (pronicus minor) und gab eine Regel zu ihrer Bestimmung, die natürlich weiter nichts ist, als die in Worte gesetzte Formel

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4b+1} - 1\right).$$

DIE COSSISCHEN ZEICHEN.

Mit Übersetzungen aus dem Lateinischen von A. Witting.

Was die Schreibweise der Potenzen und Wurzeln anlangt, so entnehmen wir z. B. der (53 Seiten starken) Algebra des Tübinger Universitätsprofessors Johannes Scheubel (1494 –1570), die 1551 in lateinischer Sprache zu Paris herausgegeben wurde, einige Stellen (mit Kürzungen).

Die Zeichen (Charaktere) der Worte oder Benennungen, mit denen in diesen Regeln die Zahlen in gewisser natürlicher Ordnung bezeichnet werden, sind

φ, 𝓍, ʒ, 𝔠𝔢, ʒʒ, ſʒ, bſʒ, ʒʒʒ, 𝔠𝔠𝔢, ʒſʒ, tſʒ, ʒʒ𝔠𝔢 ...

Außerdem die Zeichen + und —.

ERKLÄRUNG DER CHARAKTERE.

φ. *Der erste Charakter hat die Benennung Zahl, so daß, wenn er irgend welcher Zahl hinzugefügt wird, sie einfach als Zahl genommen wird. Z. B. 4 mit angehängtem Zeichen* φ, *also 4* φ, *heißt die Zahl 4, d. i. 4 einfache Einheiten....*

Die anderen Zeichen sind der Reihe nach:[1])

x	𝓍 = Radix, Res, Wurzel, im Italienischen auch cosa = Sache oder Ding, ferner quantum.
x^2	ʒ = Zensus, Zins, Quadrat.
x^3	𝔠𝔢 = Kubus.
x^4	ʒʒ = Quadrat des Quadrats, Zensizens.
x^5	ſʒ = Sursolidus, Surdesolidus.
...	....
x^{11}	tſʒ = Tersursolidus.

....

Als Ersatz dieser schwerfälligen Bezeichnungen hatte schon Grammateus 1521 den Exponenten, wie wir heute sagen würden, benutzt. Scheubel nimmt dagegen zur Bezeichnung von x^n die Zahl $n-1$; er nennt also x^2 die erste Größe (Prima = Pri), x^3 die zweite Größe (Secunda = Se) usw. Beispielsweise schreibt er

25 sex. + 13 quar. + 9 se. — 48 pri. — 11 ra.,

1) Links stehen die modernen Zeichen, die im 17. Jahrhundert aufkamen.

in heutiger Schreibweise

$$25x^7 + 13x^5 + 9x^3 - 48x^2 - 11x.$$

Einige weitere Bemerkungen mögen noch eingefügt werden. Das an ein griechisches ph erinnernde Zeichen ℊ ist eine Umwandlung von ϑ = Drachme, der kleinsten gangbaren Münze = Pfennig, und in der Tat wurde noch vor 40 Jahren ganz allgemein dies Zeichen an Stelle von ℱ überall angewendet und auch in den Schulen gelehrt. Die Abkürzung 𝒳 ist ersichtlich aus dem ersten Buchstaben von res (oder radix) entstanden.[1] Der oben erwähnte Ausdruck cosa wurde im Deutschen zu coss und man nannte im Mittelalter und bis hinein in das 17. Jahrhundert in Deutschland die Algebra danach auch die Coss, unterschied die gemeine Coss (Gleichungen ersten Grades) von der quadratischen Coss[2]) usw. und sprach von cossischen Zahlen usw.

Nun zu den Bezeichnungen der Wurzeln und Zahlen. Hier sagt Scheubel:

Die Aussprache ist leicht. Zuerst spricht man den Charakter oder die Silbe aus, die der Zahl vorgesetzt ist, durch die wir auch bezeichnen, daß die vorgelegte Zahl surdus[3]) *ist, sodann wird die Zahl selbst gesagt. So z. B. drückt* ra · 29 *aus* Radix 29 *(Wurzel aus* 29*). Man meint Quadratwurzel....* *Es pflegen aber viele, und zwar zweckmäßig, jene Wurzeln durch Punkte mit einer aufsteigenden Linie zu bezeichnen. So wird für Quadratwurzel* √:, *für Kubikwurzel* ꟿ: *und für Wurzel aus der Wurzel* √√: *geschrieben.*

AUS EINEM BRIEFE DES REGIOMONTAN AN GIOVANNI BIANCHINI (1463).

Nach der Übersetzung aus dem Lateinischen von M. Curtze. (Abh. zur Gesch. d. math. Wissenschaften XII. Heft, Leipzig 1902.)

VIERTE FRAGE.

Teile 10 *in zwei Zahlen, dividiere die größere durch die kleinere und die kleine durch die größere. Die Summe*

1) Descartes hat 1637 zuerst x zur Bezeichnung der Unbekannten verwendet.

2) Vgl. S. 52 Christoph Rudolph.

3) Surdus etwa gleich irrational; im Englischen bezeichnet man heute noch die verschiedenen Wurzeln ($\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ ...) als surds.

beider Quotienten sei 25: ich frage, welches die Teile sind.

Original

| 10

$\frac{1 ꝛ}{10 ɯ̄ 1 ꝛ}$ $\frac{10 ɯ̄ 1 ꝛ}{1 ꝛ}$

100 ɯ̄ 10 ꝛ
1 ɋ ɯ̄ 10 ꝛ
1 ɋ

$\frac{2 ɋ \; et \; 100 ɯ̄ 20 ꝛ}{10 ꝛ ɯ̄ 1 ɋ}$ — 25

250 ꝛ ɯ̄ 25 ɋ — 2 ɋ *et* 100 ɯ̄ 20 ɋ
270 ꝛ — 27 ɋ *et* 100

Alles geteilt durch den (Koeffizienten des) Census

10 ꝛ — 1 ɋ *et* $\frac{100}{27}$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 27 \\ 25 ɯ̄ \frac{100}{27} & 25 \\ & \overline{135} \\ & 54 \\ & \overline{675} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{x} & & \\ \text{x88} & & 100 \\ 575 & 21\frac{8}{27} & \overline{575} \\ \text{277} & & \overline{27} \\ 2 & & \end{array}$$ dessen Wurzel

5 ɯ̄ *Wurzel aus* 21 $\frac{8}{27}$ *das ist der Wert d. Unbekannten*

5 *et Wurzel aus* 21 $\frac{8}{27}$ *zweiter Teil*

---

25 $\frac{575}{27}$

$$\begin{array}{c} 675 \\ \overline{575} \\ \overline{100} \\ \overline{27} \end{array}$$ *Differenz der Quadrate.*

Übertragung

10

$\frac{x}{10-x}$ $\frac{10-x}{x}$

$100-10x$
x^2-10x
x^2

$$\frac{2x^2+100-20x}{10x-x^2}=25$$

$$250x-25x^2=2x^2+100-20x$$
$$270x=27x^2+100\,.$$

Alles geteilt durch den Koeffizienten von x^2

$$10x=x^2+\frac{100}{27}$$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 27\cdot 25 \\ 25-\frac{100}{27} & \overline{54} \\ & 135 \\ & \overline{675} \\ & 100 \\ 575:27=21\frac{8}{27} & \overline{575} \\ & \overline{27} \end{array}$$ daraus die Wurzel

$$5-\sqrt{21\frac{8}{27}}=x$$

$$5+\sqrt{21\frac{8}{27}}=10-x$$

$5^2=25$ $\sqrt{21\frac{8}{27}}^{\,2}=\frac{575}{27}$

Differenz $=\frac{100}{27}$.

Underweysung der messung / mit dem zirckel vnd richtscheyt / in Linien ebnen vnnd gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zusamen getzogen / vnd zu nutz aller kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren / in truck gebracht im jar M.D.XXv.

. . . .

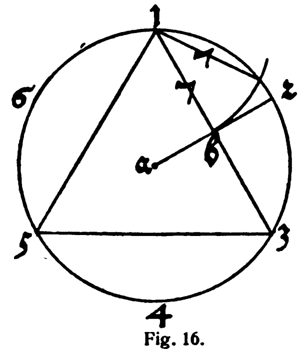


Fig. 16.

Hernach folget das ander büchlein von den ebnen feldern.

. . . .

Nun will ich anzeygen wie man auf einer ebne gleycheckct figuren / gerad oder vngerad / als da sind / drey / fier / fünf / sechseckct figuren 2c. sol machen.

[Hier folgt die Konstruktion des regulären Sechsecks und Dreiecks.]

. . . .

Nun will ich durch den vorigen dryangel / vnd auß seiner beschreibung durch einen gemeinen weg / den man von behendigkeyt wegen / in der arbeyt braucht. ein sibeneck machen / ich thue im also / ich zeuch ein gerade lini auß dem Centrum a. in den punckten 2. so schneidt sich die seytten des dryangels 1.3. in der mitt voneinander in den selben punckten setz ich ein .b. so geet die leng 1.b. siben mal herum / wie das oben in der figur angetzeigt vnd hie vnden auch aufgerysssen ist / vnd die eck mit geraden linien zusamen getzogen.

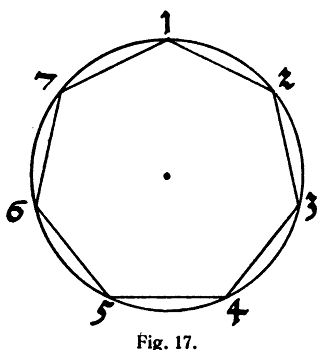


Fig. 17.

Aber ein fünfeck auß vnuerruckten zirckel zu machen / dem thue also / Reiß zwen zirckel durch einander / also das eins ytlichen ründe / durch des andern Centrum gee / vnd die zwey Centra a.b. zeuch mit einer geraden lini zusamen / das wirdet ein leng einer seyten des fünften eckes / wo aber die zirkellini an einander durchschneiden / da setz oben ein .c. vnden ein .d. vnd reiß ein gerade lini .c.d. Darnach nym den vnuerruckten

zirckel vnd ſetz in mit dem ein fuß in den punckten . d . vnd mit dem andern reiß durch die zwen zirckelryß / vnd ire bede Centro . a . b . vnd wo die zwen runden riß durchſchnytten werden / da ſetz . e . f . Aber wo die aufrecht . c . d . durchſchnytten wirdet / da ſetz ein . g . Darnach zeuch ein gerade lini . e . g . gar hynauß byß an die zirckellini / da ſetz ein . h . darnach zeuch ein andre gerade lini . f . g . biß an die zirckellini da ſetz ein . i . / zeuch darnach . i . a . vnd . h . b . gerad zuſamen / ſo werden drey ſeyten des fünfecks / vnd von dann laß zwo gleich ſeyten leng vom . i . h . oben zuſamreichen / ſo wirdet ein fünfeck / wie ich das vndere hab aufgeryſſen.

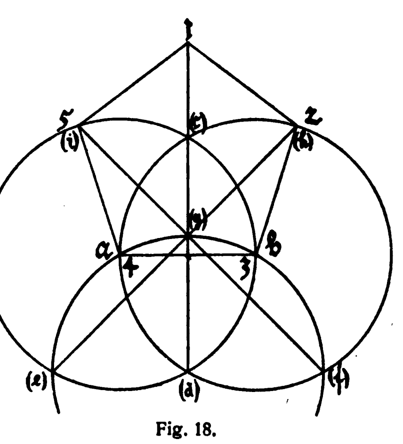


Fig. 18.

Vß diſem fünfeck begibt ſich zu machen / durch hilf des vorgemachten dryangels / ein fünfzeheneck / dem thue alſo / Reiß aus dem Centro . a . ein zirkelrys / vnnd reiß darein die ſeyten des dryangels oben . b . vnden . c . Darnach nym die leng der ſeyten eines fünfecks / vnd leg das eyn ort in den punckten . b . vnd das ander end leg an den zirckelryß / da hyn ſetz ein . d . ſo bleibt zwiſchen . d . c . ein teyl vber / das ſelb zirckeltrum teil mit einem punckten . e . in zwey gleiche teyl / ſo du dann . e . c . mit einer geraden lini zuſamenzeuchſt / ſo wirdet darauß ein ſeyten eins . 15 . eckes / das im zirckel herumb dryt / wie ich das vnden hab aufgeryſſen.

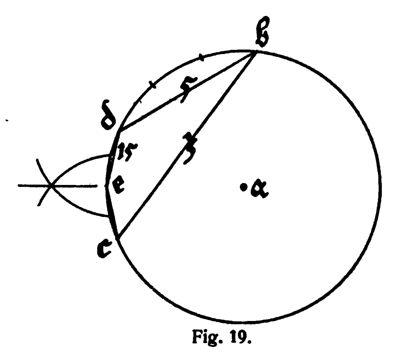


Fig. 19.

Ein neuneck iſt durch ein dryangel zu finden / alſo / Reiß aus einem Centrum . a . ein groſſe zirckellini / darein reiß mit

unverrucktem zirckel / drey fischblosen / der obern ende an der zirckellini sey . b . der andern end auf den seyten sey . c . d . Darnach reiß in der öbern fischblosen / ein aufrechte gerade lini . b . a . dise lini teil mit zweyen punckten . 1 . 2 . in drey gleiche felt / also das 2 . der negst punckt beym . a . sey / unnd far durch den punckten . 2 . mit einer geraden zwerchlini zu gleichen winckeln . b . a . und wo sie die blosenlini zu beden seyten durchschneidet / da setz . e . f . Darnach nym ein zirckel / setz in mit dem ein fuß / in das Centrum . a . und den andern in den punckten . e . und reiß durch das . f . zu ring herumb / ein zirckellini / so geet die leng . e . f . zu neun mal in disem zirckelriß herum / solchs hab ich hernach aufgerissen.

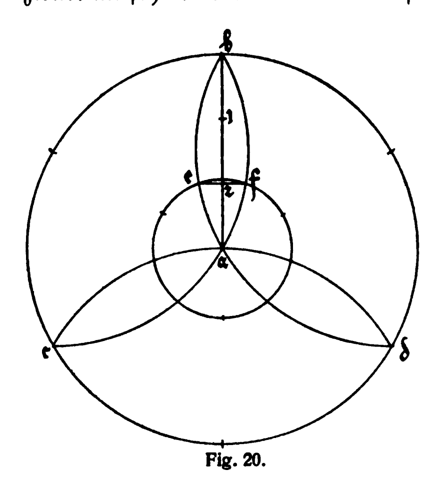


Fig. 20.

So ich bald ein eylfeck in ein zirckel reyssen will / nym ich ein vierteyl von des zirkels diameter und erleng jn ein achtteyl

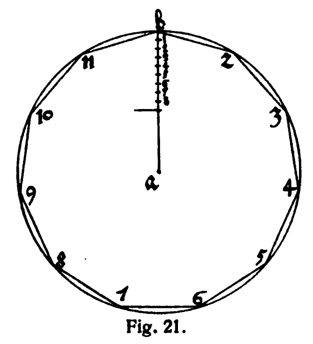


Fig. 21.

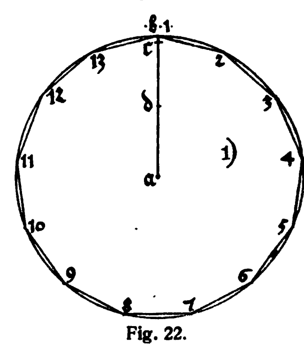


Fig. 22.

auß jm selbs / und far mit diser leng herumb im zirckel das tryt beileuftig ein / also das es sich Mechanice / aber nit de-

1) Wie er den Punkt *c* findet, gibt Dürer nicht an.

monstratiue findet/Weyter so ich behend ein .13. eck soll machen/ so reiß ich auß einem Centrum .a. ein zirckellini Darnach reiß ich ein halbenn diameter .a.b. vnd schneid den mit einem puncten .b. in der mit von einander vnd brauch die leng .c.b. zu .13. malen im zirckel herum / ist aber auch mechanice vnd nit demonstratiue.

Bemerkenswert ist, daß Dürer zwischen genauen (demonstrative) und angenäherten (mechanice) Konstruktionen wohl unterscheidet.[1]) – Die Rechtschreibung, nach der sogar zuweilen in derselben Zeile ein Wort verschieden geschrieben ist, entspricht hier wie in den anderen Stücken genau dem Urtext. – In Fig. 18 sind die im Originale fehlenden Buchstaben (*c*) bis (*i*) ergänzt. – Zirckeltrum = Kreisbogen.

Rechnung auff der Linien vnd Federn / auff allerley Handthirung gemacht / durch Adam Riesen. Auffs new mit Fleis durchgelesen vnd zu Recht bracht. Gedruckt zu Franckfurt an der Oder / durch Andream Eichhorn.

(Schlußworte des Anhanges: Wöllest solch Büchlein vnd kurtze erklerung jetzt / welches ich zum andern mal[2]) lasse ausgehen / zu danck annemen / wil ich verdienen / vnd ir auffs eheſt ich mag / die Practica / nach allem Fleiß heraus streichen. Datum auff S. Annaberg / Dienstag nach Martini / im Jahr 1525.)

Von der Linien.

Die erste vnd vnterste bedeut eins / die ander ob jr zehen / die dritte hundert / die vierdte tausent. Also hinfort die nechste darüber allwegen zehen mal mehr / denn die nechste darunter. Vnd ein jegliches spatium gilt halb so viel / als seine nechste Linien darüber.

Addire oder Summire.

Heist zusammen thun / leret wie man viel vnd mancherley zahlen von gülden groschen pfennigen vnd hellern in eine

---

1) Führe die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sorgfältig aus und beachte die guten Ergebnisse bei den angenäherten Methoden. Beweise, daß die Fünfeckskonstruktion Fig. 18 ebenfalls nur „mechanice“ ist. Berechne auch den Grad der Ungenauigkeit trigonometrisch und zeige, daß $\angle abh$ um 22′ zu groß ist.

2) Erste Auflage schon 1522.

Sum̃a bringẽ[1]) sol. Thue jm also: Mache für dich Linien / die theil in soviel feld / als Müntz vorhanden / lege die fl besonder / ß allein / ₰ vnd hl auch jeglich allein / hl vnd ₰ mach zu ß / was kömpt leg zu den ß. Als denn mach die ß zu fl / leg es zu den andern fl / nach art eines jeglichẽ Landes.

Auch soltu mercken / wenn fünff ₰ auff einer linië ligen, dz du sie auffhebst / vnd den fünften in das nechste spacium darüber legest.

Desgleichen auch wenn zween ₰ in einem spacio ligen / so heb sie auff / vnd lege einen auff die nechste linien darüber / wie denn die nechsten zwey Exempel / den ß für 12 ₰ / vnd den fl für 21 ß gerechnet / klerlich lernen werden.

Item / einer hat empfangen / wie hernach verzeichnet.

fl	ß	
123	17	9
234	18	7
307	11	5
678	13	6

Wie viel macht es in einer summa? Thu jhm also: lege die fl insonderheit / desgleichen die ß vnd ₰. Mach ₰ zu ß vnd ß zu fl / kommen 1345 fl 19 ß 3 ₰.

Wie das Titelbild anzeigt, hat man sich zu denken, daß auf dem Tisch eine genügende Anzahl von horizontalen Linien gezogen werden und auf und zwischen diesen die Zahlen durch Rechensteinchen, oder sonstige kleine flache Gegenstände als Marken dargestellt werden. Auf jeder Linie braucht man nur bis zu 4 solcher Marken, da ja 5 Einheiten einer Linie durch eine Einheit des darüber liegenden Zwischenraumes ersetzt werden sollen.

In einer 30 Seiten umfassenden lateinischen Unterweisung von Balthasar Licht aus dem Jahre 1509[2]) finden wir ein Beispiel der Linienrechnung mit folgenden Zahlen und Figuren:

---

1) Die Wellenlinie bedeutet ein n oder ein m; sie kommt sowohl in lateinischen wie deutschen Schriften jener Zeit noch häufig vor. Erhalten hat sie sich bis in unsere Zeit in dem Verdoppelungsstrich des m̄.

2) Eine ältere Auflage wurde wahrscheinlich schon 1500 gedruckt.

fl	ß	₰
9	—	—
15	17	15
230	8	9
1351	20	17

Fig. 23.

Hier ist jede Summe zunächst in den 3 Feldern für sich dargestellt; danach wird nun umgerechnet in
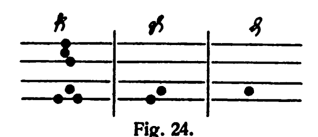


Fig. 24.

so daß also 1607 fl 6 ß 5 ₰ herauskommen.

Bequemer als diese Art, bei der die Linien immer von neuem gezogen werden mußten, ist die auch heute noch im ersten Rechenunterrichte bei uns gebrauchte Rechenmaschine mit farbigen Kugeln an Drähten.[1]) Aber schon im Altertum hatte man das Rechenbrett mit eingeschnittenen Rinnen, in die man die Marken legen konnte (Abacus).[2])

Nachdem Riese auf $11^1/_2$ kleinen Seiten in einer für Anfänger sicherlich schwer verständlichen Weise die Rechnung auf den Linien erklärt hat, wendet er sich nun weiter.

Folgen die species
auff der Federn.[3])

Hier kommt der Reihe nach Addirn, Subtrahirn (sehr mangelhaft erläutert), Duplirn,[4]) Medirn[4]). Dann wendet er sich zum

---

1) In Rußland (auch noch in China, Japan und anderswo) sind diese Rechenmaschinen in kleinem Maßstabe auf dem Tische liegend in täglichem Gebrauch.

2) Der Ton liegt auf der ersten Silbe.

3) d. h. ohne Rechenbrett mit Papier und Schreibfeder.

4) Verdoppeln und Halbieren, damals besondere Rechnungsarten.

Multiplicirn.

Lehret viel machen / Muſt auch forn anheben / vnd vor allen dingen das ein mal eins / auswendig lernen / wie vorhin angezeiget / oder machs nachfolgenden zweyen Regeln.

Die Erſte.

Addir zuſammen die zwo figuren[1]) / die kleineſt ſchreib / als denn multiplicir mit einander / wie viel von jeder bis auff 10 gebricht / vnd ſchreib daſſelbig für die geſatzte Figur. Kömpt obn auß dem multiplicirn ein zal mit zweyen figuren / ſo addir die ander figur zur geſatzten, als hie in folgenden Exempeln:

8 · 2 · 7 · 3 · 6 · 4 · 6 · 4 ·
9 · 1 · 8 · 2 · 8 · 2 · 7 · 3 ·
———————————————
7 · 2 · 5 · 6 · 4 · 8 · 4 · 2

Die Andre.

Setz für die kleinen ein 0 / Als 7 mal 8 alſo 70 / vnd nim dar von was da kömpt aus der kleineren gemultiplicirt mit dem vbrigen ſo die grösser von zehen genommen wird / Als hierin / Sprich 7 mal 2 ſind 14 / die nim von 70 / bleiben 56 / Alſo dergleichen.

8 · 0 · 6 · 0 · 4 · 0 · 5 · 0 .
8 · 2 · 7 · 3 · 9 · 1 · 8 · 2 ·
———————————————
6 · 4 · 4 · 2 · 3 · 6 · 4 · 0

Ich glaube, der Leser wird finden, daß auch hier eine Erläuterung nötig ist. Es sind also hier zwei Regeln gegeben, wie man sich das sogenannte kleine Einmaleins erleichtern kann. Die Punkte im obigen Beispiel sind wie im Original, sie sind durchaus geeignet zu verwirren. Die erste Regel stellt sich in allgemeinen Zeichen folgendermaßen dar:

$$ab = (a + b - 10) \cdot 10 + (10 - a)(10 - b),$$

ist also anzuwenden, wenn a und b zwischen 5 und 10 liegen. Die obigen Beispiele sind

$$8 \cdot 9 = 72, \quad 7 \cdot 8 = 56, \; 6 \cdot 8 = 48, \quad 6 \cdot 7 = 42!$$

1) Figur bedeutet bei den alten Cossisten das, was wir heute Ziffer nennen, Ziffer das, was wir heute Null nennen. Vgl. frz. zéro, engl. cypher.

Die andere Regel lautet allgemein, wenn $a > b$ ist:[1])

$$ab = 10b - b(10 - a).$$

Die vier Zahlenbeispiele, die darunter stehen, dürften nun klar sein.

. . . .

Rechnung nach der lenge / auff den Linien vnd Feder. Darzu Vortheil vnnd behendigkeit durch die Proportiones, Practica genannt / mit gründlichem vnterricht des visierens. Durch Adam Riesen, im 1550 Jahr.

Rechnung nach der lenge mit der Feder.

Die Species in gebrochenen zahln.

Addirn.

Haben die brüch gleiche nenner / so addir die zeler / vnterschreib einen nenner / Ist das ober mehr denn der nenner / Theile ab wie hie /

Item $\frac{6}{19}\ \frac{9}{19}\ \frac{11}{19}\ \frac{16}{19}\ \frac{18}{19}$ Wieviel machen die / Summir die obern komen 60 / die theil in 19 werden $3\frac{3}{19}$. — Haben die brüch vngleiche nenner als $\frac{3}{5}$ vnd $\frac{7}{8}$ Setz vnd multiplicir creutzweis / Addir vnd vnterschreib einen nenner durch den andern multiplicir also / sprich 3 mal 8 seind 24 vnd 5 mal 7 seind 35 / addir 24 vnd 35 komen 59 / darunter setz 5 mal 8 / als 40 / also $\frac{59}{40}$ / macht $1\frac{19}{40}$ theil.

Item $\frac{5}{9}$[2]) zu $\frac{13}{14}$ vnd $\frac{25}{26}$. Allhie addir die ersten zween brüch / wie gesagt / vnd alsdann addir den Dritten.

$\frac{5}{9}\ \frac{13}{14}$

13	14	14	
9	5	9	
117	70	126	vnten

1) Ist diese Bedingung nötig? Warum ist sie gemacht?
2) Hier steht in der Originalausgabe fälschlich 59.

```
117
 70 addir
---------
187 oben

   187     25
   ---     --
   126     26

                     187     126
                      26      25
                    ------  ------
                    1122     630
                    374     252
                    ------  ------
                    4862    3150

   4862                126
   3150 addir           26
   ----------          ----
   8012 oben           756
                       252
                       ----
                       3276   vnten alſo

  146
  287 |
 8012 | 2 1460/3276 | 730/1638 | 365/819  theil
 3276 |
```

Wiltu gantze vnd gebrochene zu gantzen vnd gebrochenen addirn / So addir zum erſten die gebrochenen / wird daraus eins oder etlich gantz / ſo gib daſſelb zu den gantzen / wie hie.

Item $13\frac{3}{5}$ fl gib zu $17\frac{7}{8}$ fl machs vnd ſetz / alſo

```
 13 3/5                   24    1 |
 17 7/8    3/5   7/8      35   59 |  1 19/40
---------------------     ---     |
 31 19/40                 59   40 |
```

Addir $\frac{2}{5}$ vnd $\frac{7}{8}$ komet $1\frac{19}{40}$ das gib zu den gantzen.

Erbtheilung und vormundſchafft.[1])

210.) Ein Vater vorleſt ſeim Weib / fünff kinder / an barſchafft vnd gütern / 9870 fl / die Mutter nimet den dritten teil / Die Vormünden legen den kindern auff zins 4800 fl / Nemen jehrlich 5 fl vom hundert / geben der Mutter von einem Kind in die Koſt / zu ſchuhen vnd kleidern / das jahr 23 fl / nach

1) Beispiele dieser Art (Bürgerkunde!) sind kennzeichnend für die meisten Coss-Bücher jener Zeit.

ausgang dreyer jahr / wandern 2 kinder / gehet auff eines das jahr 40 fl / wieviel gebürt der Mutter erster theilung / vnnd auch jedem kind nach ausgang fünffer jahr / setz

9870 flor.	zutheilen
3290	der Mutter zu ihrem drittentheil
6580	so viel bleibt den kindern.

Nun werden 4800 flor. 5 jahr auff zins ausgethan / sprich 100 flor geben 5 flor. zins / was geben 4800 flor. 5 jar facit 1200 fl. thu zum haubtgut / als 6580 flor. wird 7780 / Teil in 5 teil / wird 1556 flor. so viel gebürt jedem kind / wann es nichts anworden / Nun hat jedes kindt so bey der Mutter blieben / das jahr anworden 23 flor. thut 5 jahr 115 fl. / Nim von 1556 / fl bleiben 1441 fl / so viel gebürt der kinder einem / so bey der Mutter blieben / so hat der andern eins die zwey jahr 34 fl. mehr verzert / Nim von 1441 / bleiben 1407 fl / so viel gebürt jedem / so gewandert.

Rechnung / mit fortheil vnd behendigkeit / die practica genandt / durch Adam Riesen.

• • • • • • • •

Regula Proportionum.

In dieser Regel durch folgendes Büchlein / werden vier zahln gebraucht / gleich der Regel de tri / wie sich die erste gegen der ander helt / also mus sich die dritte so vnbekandt gegen der vierden halten / oder wie sich die erste gegen der dritten helt / mus sich die ander gegen der vierden halten.

Item 4 eln vmb 8 fl / wie komen 12 eln / facit 24 fl / 4 helt sich gegen den 8 / als 1 gegen 2 / also $\frac{1}{2}$ / also mus sich die vnbekandte desgleichen halten. Multiplicir 12 die dritte mit dem Nenner 2 / komen die 24 / die haben sich gegen den 12 wie sich 8 gegen 4 halten / denn es ist auff beyden theilen proportio dupla.

8 / 2	24 / 2	Es wird 4 so offt in 8 als 12 in 24
4	12	behalten.

Vnd kommet also aus den dreyen bekandten / die vierde so vnbekandt 4 8 12 24.

Vier ist der dritte theil gegen der dritten zal / also ist auch 8 der dritte theil / gegen der vierden / helt sich 4 gegen 12 als $\frac{4}{12}$ desgleichen helt sich auch 8 gegen 24 / als $\frac{8}{24}$ ist jedes so es auffgehoben $\frac{1}{3}$ / wenn du aber die ander zal mit der dritten multiplicirst / kompt gleich so viel als wann du die erste zahl mit der vierden multiplicirst / sprich 8 mal 12 ist 96 / so viel macht auch 4 mal 24.

Proba

Nim die prob von der dritten zahl / desgleichen von der andern mit 9 oder 7 / multiplicir mit einander / so viel kompt auch wann du die prob der ersten vnd fördern zahl / mit der vierden multiplicirst / vnd was weniger dann die prob behelltest.

Es haben andere / so zuvor geschrieben / es die welsche practica genandt / ob solchs darumb geschehen / das sie allein des multiplicirn vnd dividirn gebrauchen / vnd den anhebenden schweren bericht gethan / acht ich nicht ob mir das nicht wol gesprochen / das ich in folgenden exempeln ein jedes der Regel de tri gleichmeßig aufffsetz / das Mitler oder hinder gegen dem fördern vergleiche / dann durch solche vergleichung kanstu nicht irren / Man hat es auch vor viel hundert jahren in deudschen landen gewust / wenn man 1 kandel oder mas wein vmb 16 ₰ kaufft / das ein nössel oder kendlein / vmb das halbe gelt sol bezalt werden.

Proportio Dupla

Ist die ander zahl noch so viel als die erste / mus die vierde vnd vnbekandte noch so viel als die dritte sein.

Item 4 ℔ vmb 8 fl wie komen 11 ℔ facit setz
4 8 fl 11 facit 22 fl.

Sprich 8 ist noch so viel als 4 / derwegen duplir 11 komen 22 fl.

Proba

Item 11 ℔ vmb 22 fl wie 4 ℔ facit
11 22 fl 4 facit 8 fl.

Sprich 22 ist noch soviel als 11 / derhalben duplir 4 komen 8 / sind zuvor mitten gestanden.

REINE ARITHMETIK VON MICHAEL STIFEL.

Mit einer Vorrede von Philipp Melanchthon, Nürnberg 1544. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. Anhang zum zweiten Buche.

ÜBER DIE QUADRATUR DES KREISES.

1. Man muß bei Behandlung der Quadratur des Kreises zwischen dem physischen und dem mathematischen Kreis unterscheiden.

2. Man möge auch beachten, daß sich jene von den alten Philosophen bewegte Frage auf den mathematischen, nicht auf den physischen Kreis bezieht.

3. Der physische Kreis ist ein gewisses Abbild des mathematischen Kreises.

4. Das Dreieck ist aller Vielecke erstes.

5. Aller Vielecke letztes ist der Kreis.

6. Mit Recht wird daher der mathematische Kreis als Vieleck mit unendlich vielen Seiten beschrieben.

7. Der Umfang des mathematischen Kreises wird daher durch keine Zahl dargestellt, weder durch eine rationale, noch durch eine irrationale.

8. Vor dem mathematischen Kreise sind alle Vielecke mit zählbaren Seiten, ebenso wie vor der unendlich großen Zahl alle angebbaren Zahlen sind.

9. Daher folgt, daß ein mit dem Zirkel gemachter Kreis kein mathematischer ist.

10. Dann aber wirst du einen mathematischen Kreis geben, nachdem du eine unendlich große Zahl gegeben haben wirst: das wollen nämlich jene, die versichern, der Kontingenzwinkel sei kleiner als ein unendlich kleiner geradliniger Winkel.

11. Wie die unendlich große Zahl nicht zur Wirklichkeit gehört, selbst wenn du dir die Tropfen des Meeres vorstellst, das größer ist, als der ganze Himmel: so gehört auch der mathematische Kreis nicht zur Materie, auch wenn sie von allen Goldschmieden der ganzen Welt mit Mühe und Sorgfalt zubereitet geglättet und geebnet wäre.

12. Weder ein rationales, noch ein irrationales Verhältnis hat den Umfang des mathematischen Kreises zu seinem Durchmesser.

13. Damit ist es ganz sicher, daß die Quadratur des Kreises menschliche Rechenverhältnisse übersteigt.

14. Wenn es sich aber um die Quadratur des physischen Kreises handelt, so prahlen wir vergeblich mit Triumphgeschrei, daß diese Quadratur schon einmal erfunden sei, als ob durch solche Erfindung ein ungeheures und ungewöhnliches Wunder geschehen sei.

15. Allerdings mußten Euklid und Ptolemäus an vielen Stellen Kreise benutzen, aber sie wichen klug und verständig der Frage nach dem Verhältnis, das zur Kreisquadratur gehört, aus, d. h. nach dem Verhältnis des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser.

16. So z. B., wo Euklid im 8. Lehrsatz seines 12. Buches das Verhältnis der Säulen zu ihren Pyramiden ausspricht, schließt er vorsichtig und bedacht runde Säulen und Pyramiden aus.

17. Eines solchen Mannes Beispiel ist Ptolemäus gefolgt, als er den Kreisdurchmesser in 120 gleiche Teile zerlegte und den Umfang in 360 unter sich gleiche Teile, die aber denen des Durchmessers nicht gleich sind.

18. Es hätte jeder Kreis ein Quadrierungsverhältnis, wenn die Kenntnis des Verhältnisses vom Umfang zu seinem Durchmesser möglich wäre.

19. Denn aus dem Produkt aus dem Halbmesser und dem halben Umfang entsteht die Fläche eines dem gegebenen Kreise gleichen Rechtecks.

20. Man hätte dann nichts weiter zu tun, als die mittlere Proportionale zwischen den beiden ungleichen Seiten des Rechtecks zu bestimmen. Dieses Mittel wäre die Seite des dem Kreise gleichen Quadrats.

21. Daher steht fest, die Quadratur des Kreises sei nichts anderes, als die Konstruktion eines Quadrats, das dem gegebenen Kreise gleich ist.

22. Aber jene Gleichheit bezieht sich nicht auf die Umfänge der Figuren, sondern auf ihre Inhalte.

23. Die Auffindung aber jener Gleichheit setzt eine Zahl voraus; die präcise die Länge des Kreisumfangs darstellt, sei sie rational oder irrational, eine Zahl, die aber auf keine Weise angebbar ist.

24. Daraus folgt erstens, daß es unmöglich ist, das Verhältnis des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser, oder des halben Umfangs zum Halbmesser zu bestimmen.

25. Zweitens folgt, daß es unmöglich ist, die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser und dem halben Umfang zu finden.

26. Es folgt drittens, daß es unmöglich ist, den mathematischen Kreis zu quadrieren.

27. Ungebildete sind zu dulden, wenn sie dagegen ankämpfen würden, da dergleichen der Frömmigkeit nichts zugibt noch wegnimmt.

28. Gebildete aber mögen bedenken, daß auch Euklid und Ptolemäus derselben Ansicht waren.

ÜBER DIE QUADRATUR DES PHYSISCHEN KREISES.

1. Es ist möglich und leicht gemacht, daß man mit irgendeinem annähernden Verhältnis zwischen dem Halbmesser und dem Umfang des physischen Kreises ihn quadriere, und zwar so, daß jene Quadrierung den Sinnen genügt.

2. Es ist, sage ich, möglich, daß zwei Metallbleche gegeben werden von gleicher Dicke aus derselben Legierung gegossen, deren eines kreisförmig, das andere quadratisch ist; und daß beide ein und dasselbe Gewicht haben und beide angeschlagen denselben Ton geben.

3. Jenes rationale Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser, dessen Autor Archimedes sein soll $\left(d.\ i.\ 3\frac{1}{7}\right)$*, kommt der Wahrheit wunderbar nahe, sicherlich so sehr, daß eine danach ausgeführte Quadratur des Kreises das Urteil der Sinne täuscht.*

4. Teilt man den Durchmesser des Kreises in 28 Teile, so wird die Seite des flächengleichen Quadrats √ʒ 616. *Das ist*

Ganze	*Minuten*	*Sekunden*
24	49	9.

5. Aber jenes irrationale Verhältnis, das Nicolaus von Cusa *gefunden hat und über das* Johannes Regiomontanus *disputierte, kommt dem rationalen Verhältnis des Archimedes recht nahe.*

6. Teilt man den Durchmesser des Kreises in 28 Teile, so macht die Seite des flächengleichen Quadrats (nach diesem irrationalen Verhältnis) $\sqrt{\mathfrak{z}}\cdot\sqrt{\mathfrak{z}}\,129654 + \sqrt{\mathfrak{z}}\,64827$. *Das ist*

Ganze	*Minuten*	*Sekunden*
24	47	33.

7. Wenn (sagt man) der Halbmesser eines gegebenen Kreises um die Sehne seines Quadranten verlängert wird und diese Strecke als Durchmesser eines zweiten Kreises genommen wird, so wird das diesem Kreise eingeschriebene gleichseitige Dreieck denselben Umfang haben, als der gegebene Kreis.

DASS PHYSISCHE BEWEISFÜHRUNG NICHTS AUSMACHT FÜR DIE QUADRATUR DES MATHEMATISCHEN KREISES.

1. Nichts richten die aus, die die von der Philosophie bewegte Frage über die Quadratur des Kreises mit einem Faden oder Zirkel zu lösen versuchen.

2. Vergeblich ist alle Arbeit zur Auffindung der Quadratur des Kreises, soviel man sich auch mit Rechnung plage und auf welche Art und durch welche Mittel auch immer es geschehen mag.

3. Sehnen der Kreisbögen können durch rationale oder irrationale Zahlen genau gegeben werden.

4. Was aber durch irrationale Zahlen genau gegeben ist, kann nicht durch rationale Zahlen gegeben werden.

5. Die Verhältnisse der Sehnen zu ihren Bogen können weder durch rationale noch durch irrationale Zahlen gegeben werden.

6. Da die Irrationalzahlen nach Euklid keine Zahlen sind, so ist es klar, daß die irrationalen Verhältnisse, solche gleichsam sind, bei denen sich zwei Zahlen verhalten wie eine Nichtzahl zu einer Zahl.

7. Offenbar ist auch das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser und der Bogen zu ihren Sehnen gleichsam so, als wenn sich zwei Zahlen verhalten wie eine Nichtzahl

zu einer Nichtzahl oder so als verhielte sich eine Nichtzahl zu einer Zahl, wie eine Nichtzahl zu einer Nichtzahl.

8. Es ist ein physischer Beweis, wenn du so folgerst: Angebbar ist ein Quadrat, das größer ist als ein gegebener Kreis und angebbar ist ein Quadrat das kleiner ist als derselbe Kreis, also ist auch ein Quadrat angebbar, das jenem Kreise gleich ist. Das folgt nicht.

9. Ebenso falsch ist folgender Schluß: Angebbar ist eine rationale Zahl kleiner als die folgende irrationale $\sqrt{\mathfrak{z}}\cdot 9000 - \sqrt{\mathfrak{z}}\,16200000$, *z. B.*

Ganze	*Minuten*	*Sekunden*
70	32	3.

Auch ist eine rationale Zahl angebbar, die größer ist als jene irrationale:

Ganze	*Minuten*	*Sekunden*
70	33	3.

Folglich ist eine rationale Zahl angebbar, die derselben irrationalen Zahl gleich ist.

10. Physische Beweisgründe täuschen in der Mathematik meistens.

11. Wenn physische Beweisgründe in mathematischen Dingen täuschen, so täuschen umsomehr physische und mathematische Beweisgründe in göttlichen Dingen.

12. Daß ein Körper vollkommen kugelförmig sei, scheint mir wenigstens einen Widerspruch einzuschließen. Aber die heilige Schrift hat diesen Ausspruch: Kein Wort wird bei Gott unmöglich sein.

13. Die Körper des Himmels sind Werke der Hände Gottes: daher wage ich nicht zu leugnen, daß sie genau die Verhältnisse des mathematischen Kreises haben.

Die Unterscheidung zwischen physischen und mathematischen Figuren ist sehr interessant. Besonders beachtenswert ist, daß im Anfang ganz naiv der Kreis als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten erklärt wird, also wie wir heute sagen würden, ein Grenzübergang gemacht wird, später aber an den parallellaufenden Grenzübergang mit den Zahlen nicht gedacht wird. Der Begriff des Grenzübergangs war

eben zu jener Zeit noch nicht klar vorhanden und daher wird auch die irrationale Zahl nicht als Grenzbegriff verstanden, sondern nur als Symbol oder als „Nichtzahl". Der oben erwähnte Kontingenzwinkel, d. h. der Winkel zwischen einem Kreise und seiner Tangente, stand damals im Mittelpunkte mathematischer Untersuchungen. Bei Euklid werden die Lehrsätze erst für Pyramiden und Prismen mit dreiseitiger, dann mit polygonaler Basis bewiesen; darauf wird mittels des sogenannten Exhaustionsbeweises gezeigt, daß ein Zylinder das Dreifache eines gleich hohen Kegels auf demselben Grundkreise ist. Der Exhaustionsbeweis besteht darin, daß gezeigt wird, der Zylinder könne weder größer noch kleiner sein, als das Dreifache des betreffenden Kegels. Tatsächlich hat Euklid in seinen Elementen nichts über das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser gesagt, obwohl eine angenäherte Kenntnis dieses Verhältnisses damals längst vorhanden war. Erst Archimedes schloß das Verhältnis zwischen zwei Grenzen ein, aber Stifel kannte die Abhandlung des Archimedes über die Kreismessung, wie aus seiner Bemerkung über die Zahl $3\frac{1}{7}$ hervorgeht, nicht. Der erwähnte Nicolaus von Cusa war ein Kardinal deutscher Abstammung (1401–1464).

Die Rechnungen, die angedeutet sind, können leicht nachgeprüft werden.

JOH. SCHEUBEL, DE NUMERIS ETC.

Leipzig 1545.

ÜBER DAS AUSZIEHEN IRRATIONALER WURZELN.[1])

Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting.

... *Bei solchen nichtquadratischen Zahlen bleibt dir immer nach der letzten Subtraktion ein Rest, dessen Nenner folgendermaßen gefunden wird. Verdopple die gefundene Wurzel und addiere* 1, *dann hast du den nächstkommenden*

1) Abgekürzt und freier übersetzt, Beispiele in moderner Schreibweise.

Nenner ... Diesen setze unter den Bruchstrich (virgula), auf den jener Rest kommt, und du hast die Wurzel.

Beispiele:

$$\sqrt{9009} \approx 94\frac{173}{189}, \quad \sqrt{98765056789} \approx 314269\frac{52428}{628539}$$

... Ebenso wie nicht jede Zahl ein Quadrat ist, so ist sie auch kein Kubus. Wenn man also die letzte Subtraktion ausgeführt hat, bleibt ein Rest, dessen Nenner so gefunden wird: Nimm die gefundene Wurzel und deren Quadrat dreifach und addiere noch 1. Dann verfahre wie bei der Quadratwurzel. Die Richtigkeit ergibt sich aus dem 34. Lehrsatz des 2. Buches der Arithmetica demonstrata eines unbekannten Verfassers, die folgendermaßen lautet:

Jeder Kubus übertrifft den nächst kleineren um die Summe der Quadrate beider Zahlen und das Produkt der beiden Wurzeln.

Beispiele:

$$\sqrt[3]{681615} \approx 88\frac{143}{23497}, \quad \sqrt[3]{22545269605} \approx 2825\frac{3980}{22950351}.$$

. . . .

Wenn bei der Berechnung einer höheren Wurzel ein Rest bleibt, so erhält man seinen Nenner, indem man sich des Wachstums der vorgelegten Zahl erinnert und danach, wie bei der Quadrat- und Kubikwurzel, mit der gefundenen Wurzel umgeht.

. . . .

Beispiel:

$$\sqrt[7]{29724385601} \approx 31\frac{2227971490}{6847124257}.$$

Es gibt aber auch Leute, die beim Ausziehen der Wurzeln lieber Nullen anwenden, indem sie der gegebenen Zahl, der Höhe der Wurzel gemäß, Nullen vorsetzen, bei einer Quadratwurzel also 2 oder ein Vielfaches von 2 (denn sie versichern, daß sie die Wurzel um so genauer zu finden pflegen, je mehr Nullen sie vorsetzen) ... Dann fangen sie an zu rechnen und kommen schließlich in die Zehntel, Hundertstel oder sogar Tausendtel, je nach der Zahl der vor-

gesetzten Nullen ... Wenn ich auch diese Bemühungen, durch die jene der Wahrheit näherzukommen versuchen, nicht mißbillige, und da man eingestehen muß, die Sache liege so, daß man sie nicht fassen kann, so wollen wir lieber dabei beharren zu untersuchen, wo das Unmögliche offenbar wird, als in unnützer Neugier weiterzugehen und dahin zu streben, wohin nicht gelangen zu können feststeht.

Und wenn einer überflüssige Muße hat, so mag er sie lieber auf nützliche und dem menschlichen Verstande zugängliche Dinge verwenden ....

Auf S. 4 war die Formel

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a} \tag{1}$$

erwähnt worden. Hier erkennt man leicht, daß es sich um die Formel

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a+1} \tag{2}$$

handelt. Dabei ist naturgemäß

$$a < \sqrt{a^2+b} < a+1\,. \tag{3}$$

Um nun jene beiden Werte zu vergleichen, quadrieren wir sie und erhalten dadurch

$$a^2+b+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{4}$$

und

$$a^2+\frac{2ab}{2a+1}+\left(\frac{b}{2a+1}\right)^2 = a^2+b-\frac{b}{2a+1}\left(1-\frac{b}{2a+1}\right). \tag{5}$$

Aus (3) folgt durch Quadrieren leicht

$$0 < b < 2a+1\,,$$

so daß also der Klammerausdruck in Gleichung (5) positiv ist. Es ergibt sich somit

$$a+\frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a+\frac{b}{2a}\,.^{1)}$$

Bei der Kubikwurzel lautet die zum Beweise angeführte Regel in Zeichen

$$(a+1)^3 - a^3 = (a+1)^2 + a^2 + a(a+1) = 3a^2+3a+1\,.$$

1) Bilde Zahlenbeispiele und untersuche dann ebenso den Fall, wo b negativ ist.

Danach bildet Scheubel folgende Regel

$$\sqrt[3]{a^3+b} \approx a + \frac{b}{3a^2+3a+1}.\text{ [1]}$$

Ähnlich verfährt man bei höheren Wurzeln, z. B.

$$\sqrt[7]{a^7+b} \approx a + \frac{b}{\binom{7}{1}a^6+\binom{7}{2}a^5+\binom{7}{3}a^4+\binom{7}{4}a^3+\binom{7}{5}a^2+\binom{7}{6}a+1},$$

wo im Nenner die Binomialkoeffizienten auftreten.

Der Schluß der obigen Darlegungen Scheubels ist besonders interessant. Er scheint auf eine andere, schon bei den Arabern benutzte Methode hinzuweisen, bei der man, allgemein dargestellt, um $\sqrt[n]{p}$ zu berechnen, eine Zahl q suchte, so daß pq^n der n^{ten} Potenz einer ganzen Zahl r möglichst nahe kam; dann ist

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{q}\sqrt[n]{p\,q^n} \approx \frac{r}{q}.$$

Wählt man für q eine Potenz von 10, so hat man das oben erwähnte Verfahren, das wir ja heutzutage gewissermaßen automatisch bei der Berechnung der Wurzeln mit Hilfe der Dezimalbrüche anwenden. Die oben angeführten Zahlenbeispiele sind nicht die umfänglichsten, die Scheubel gibt; sie aber zeigen schon, daß man damals vor großen Zahlen keine Furcht hatte! Sie lassen aber auch deutlich erkennen, wie bedeutend der Fortschritt war, der durch die Einführung der Dezimalbruchrechnung hervorgerufen wurde.

DES HIERONYMUS CARDANUS GROSSE KUNST (ARS MAGNA). 1545.

CAP. XXX. ÜBER DIE GOLDENE REGEL.

Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting.

Diese Regel ist in allgemeinster Weise zur Auflösung von Gleichungen geeignet; sie lautet so: Zuerst erjage zwei benachbarte ganze Zahlen, eine größere und eine kleinere, die der Gleichung genügen; sie werden nicht schwer zu erhalten

1) Wie steht es hier mit den Grenzen, kann man auch eine untere und eine obere Grenze angeben?

sein. Die kleinere dieser Zahlen nennen wir den ersten Fund, die größere den zweiten Fund, die Differenz der Ergebnisse heiße die größere Differenz, die Differenz des ersten Ergebnisses und der Zahl[1]*) der Gleichung sei die erste Differenz genannt, die Differenz des zweiten Ergebnisses und der Zahl der Gleichung die zweite Differenz. Dividiere daher die erste Differenz durch die größere Differenz und dies Ergebnis addiere zum ersten Funde; dadurch erhalten wir einen unvollständigen Wert der Unbekannten. Diesen setzen wir in die Gleichung ein, natürlich für die Potenzen der Unbekannten, wie beim ersten und zweiten Fund, das Ergebnis subtrahiere vom zweiten Ergebnis, dann subtrahiere den unvollständigen Wert vom zweiten Funde, multipliziere den Rest mit der früheren zweiten Differenz, und dies Produkt dividiere durch die Differenz des Ergebnisses des unvollständigen Wertes und des zweiten Ergebnisses, was herauskommt ziehe vom zweiten Funde ab: Das Ergebnis ist dem Wert der Unbekannten stark angenähert. So kann man dem wahren Wert der Unbekannten durch wiederholte Operationen immer näher kommen. . . .*

Sei also zuerst die vierte Potenz und 3 dritte Potenzen gleich 100, *so siehst du, daß, wenn die Unbekannte* 2 *ist, ihre vierte und 3 dritte Potenzen* 40 *gibt, und wenn die Unbekannte* 3 *ist, ihre vierte Potenz und 3 dritte Potenzen* 162 *gibt. Daher ist der erste Fund* 2, *das erste Ergebnis* 40, *der zweite Fund* 3, *das zweite Ergebnis* 162; *ferner ist* 122 *die größere Differenz,* 60 *die erste und* 62 *die zweite Differenz. Beachte aber, daß der erste Fund immer um* 1 *kleiner sei als der zweite Fund, denn sonst wird es falsch. Nun dividiere* 60 *durch* 122, *ergibt* $\frac{30}{61}$, *was zu* 2, *dem ersten Fund, addiere; so kommt der unvollständige Wert* $2\frac{30}{61}$ *heraus.*

2 ——————— 3
40 —— 100 —— 162
60 ——— 62
122

$\frac{60}{122} \Big| \frac{30}{61} \quad 2\frac{30}{61}$

77 —— 85 > 162
62 —— 100

$2\frac{30}{61} \Big| 3 \Big| \frac{31}{61}$

$\frac{31}{61} \Big| 62\frac{1922}{61} \quad 77$

$\frac{1922}{4697} \Big| 3 \Big| 2\frac{2775}{4697}$

1) Freies Glied.

Setzt man das ein, so wird die vierte Potenz und 3 dritte Potenzen ungefähr 85, *subtrahiert man dies Ergebnis des unvollständigen Wertes von dem zweiten Ergebnis* 162, *so kommt* 77. *Subtrahiere auch* $2\frac{30}{61}$ *von* 3, *dem zweiten Funde, so bleibt* $\frac{31}{61}$; *multipliziert man das mit der zweiten Differenz* 62, *so kommt* $\frac{1922}{61}$, *und dies dividiert durch* 77 *gibt* $\frac{1922}{4697}$. *Ziehe das vom zweiten Funde* 3 *ab, so entsteht eine hinreichend genaue Lösung der Gleichung:* $2\frac{2775}{4697}$. *Wenn du willst, kannst du durch abwechselnd fortgesetzte Operationen beliebig nahe herankommen.... Genau so kann man beim Ausziehen von Wurzeln verfahren.*[1])

Die Regel zur Berechnung von Näherungswerten der Wurzeln wird an folgenden vier Beispielen, von denen oben nur eins mitgeteilt war, erläutert:

(I) $$x^4 + 3x^3 = 100.$$

Nennt man x_1 und x_2 die beiden Näherungswerte, von denen man ausgeht, also

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3,$$

so wird

$$x_1^4 + 3x_1^3 = 40, \quad x_2^4 + 3x_2^3 = 162,$$

und man hat nun zu rechnen:

$$\frac{100-40}{162-40} = \frac{30}{61}; \quad x_3 = 2\frac{30}{61}.$$

$$x_3^4 + 3x_3^3 \approx 85; \quad 162 - 85 = 77; \quad 3 - 2\frac{30}{61} = \frac{31}{61};$$

$$\frac{31}{61} \cdot 62 = \frac{1922}{61}, \quad \frac{1922}{61} : 77 = \frac{1922}{4697}; \quad x_4 = 3 - \frac{1922}{4697} = 2\frac{2775}{4697}.$$

1) Versuche selbst die Regel in algebraischer Schreibweise nachzubilden und den Beweis für ihre Richtigkeit zu führen.

(II) $$x^2 + 20 = 10x \quad \text{oder} \quad \frac{x^2+20}{x} = 10.$$
Setze
$$x_1 = 7, \quad x_2 = 8,$$
so wird
$$x_1 + \frac{20}{x_1} = 9\frac{6}{7}, \quad x_2 + \frac{20}{x_2} = 10\frac{1}{2},$$

und man rechnet der Reihe nach:

$$10 - 9\frac{6}{7} = \frac{1}{7}; \quad 10\frac{1}{2} - 9\frac{6}{7} = \frac{9}{14}; \quad \frac{1}{7} : \frac{9}{14} = \frac{2}{9}; \quad x_3 = 7\frac{2}{9} \quad \text{usw.}$$

(III) $$x^3 = 6x + 20 \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{6x+20}{x^3}.$$
Setze
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4,$$
so wird
$$\frac{6x_1+20}{x_1^3} = 1\frac{11}{27}, \quad \frac{6x_2+20}{x_2^3} = \frac{11}{16};$$

und man rechnet nun:

$$1\frac{11}{27} - 1 = \frac{11}{27}; \quad 1\frac{11}{27} - \frac{11}{16} = \frac{311}{432}; \quad \frac{11}{27} : \frac{311}{432} = \frac{176}{311}; \quad x_3 = 3\frac{176}{311}.$$

Durch weiteres Rechnen erhält man
$$x_4 = 3\frac{201}{506}.$$

(IV) $$x^4 + 6x^2 + 200 = 10x^3 + 12x.$$

Setze
$$x_1 = 9, \quad x_2 = 10,$$
dann wird

$$\begin{array}{rr} x_1^4 + 6x_1^2 + 200 = 7247 & x_2^4 + 6x_2^2 + 200 = 10800 \\ 10x_1^3 + 12x_1 = 7398 & 10x_2^3 + 12x_2 = 10120 \\ \hline \text{Differenz} = -151 & \text{Differenz} = +680, \end{array}$$

und man rechnet

$$\frac{151}{680+151} = \frac{151}{831} \approx \frac{19}{104}; \quad x_3 \doteq 9\frac{19}{104}.$$

Nun wollen wir die Sache allgemein betrachten. In den ersten drei Beispielen soll eine ganze oder gebrochene Funktion der Unbekannten gleich einer Konstanten sein; wir setzen also in üblicher Weise

$$y = f(x) = c.$$

Setzen wir nun zwei Werte x_1 und x_2 ein, so erhalten wir

$$y_1 = f(x_1) \quad \text{und} \quad y_2 = f(x_2).$$

Nun berechnen wir die beiden Differenzen, die „erste" (d_1) und die „größere" (D_1)

$$d_1 = c - y_1, \quad D_1 = y_2 - y_1$$

und erhalten den Zuwachs δ_1 von x_1 durch die Rechnung

$$\delta_1 = \frac{d_1}{D_1}(x_2 - x_1),$$

wo $x_2 - x_1$ in obigen Beispielen immer gleich 1 ist. Damit wird aber

$$x_3 = x_1 + \delta_1$$

und Cardanus rechnet jetzt mit x_2 und x_3 ebenso weiter.

Das vierte Beispiel unterscheidet sich, wie man leicht sieht, von den andern nur dadurch, daß in ihm $c = 0$ ist! Bei diesen Erläuterungen sind aber eine ganze Menge Voraussetzungen, die durchaus notwendig sind, zu machen. Cardanus selbst verlangt, daß man zwei Zahlen finde, „eine größere und eine kleinere, die der Gleichung genügen". Das ist recht schlecht ausgedrückt. Zur vollen Klarheit kommen wir erst, wenn wir uns die Sache graphisch darstellen. Dann wird, da es sich hier um algebraische Gleichungen handelt, $y = f(x)$ eine Kurve ergeben, die nur aus einem einzigen Zuge besteht und die von der horizontalen Geraden $y = c$ in dem gesuchten Punkte[1]) geschnitten wird. Dann soll man

1) Es können natürlich auch mehrere Schnittpunkte sein, auch Berührungspunkte, ja die Gerade braucht die Kurve auch gar nicht zu schneiden!

x_1 und x_2 so wählen[1]), daß $y_1 < c < y_2$ ist, so daß also die Sehne P_1P_2 der zugehörigen Kurvenpunkte die Horizontale $y = c$ in einem Punkte Q zwischen P_1P_2 schneidet. Trägt man die oben angegebenen Bezeichnungen in die Figur ein, so sieht man sofort, daß der obige Wert von $\mathfrak{d}_1$ richtig ist. Die Ordinate y_3 des Punktes x_3 schneidet die Kurve in einem Punkte P_3, der hier unterhalb jener Horizontalen liegt; man wird deshalb mit x_3 und x_2 dieselbe Operation fortsetzen.[2]) Das hier von Cardanus eingeschlagene Verfahren nennt man lineare Interpolation.

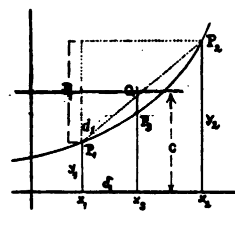


Fig. 25.

„Die Coß Christoph Rudolffs. Mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehret. Zu Königsperg in Preußen gedruckt / durch Alexandrum Lutomyslensem im jar 1553."

Diß Buch wird geteylt in zwen Teyl. Der erst beschleust acht Algorithmos / mit etlichen andern vorleufflen so zu erklerung der Coß Nottürfftig sind. Der ander zeygt an die Regeln der Coß / je eine in sonderheyt erkleret / mit viel und mancherley schönen Exempeln.

Der erste Teyl diß buchs wirt unterteylet in zwelff capitel. Das erst ist von gemeinem Algorithmo der ganzen zalen. Lernt Numeriren / Addiren / Suptrahiren / Multipliciren / Dividiren und progrediren.

. . . .

Progrediren

Lernt viel zalen mit gleicher Differentz / über sich wachsent in ein summa bringen. Geschicht also.

Besihe wie viel der zalen seyen / das behalt. Darnach addir die erste zal zur letzten / das collect multiplicir mit dem halb-

1) Ist das notwendig?
2) Was macht man, wenn P_3 oberhalb der Horizontalen liegt?

teyl des, das du behalten hast / so kompt dir die summa aller deyner gesetzten zalen.

So ein progres anfahet an der unitet / und ist die differentia 2. so besihe wie viel der zalen seyen / dieselbige zal multiplicir in sich selbs / so ists gemacht.

So aber die progres fahet an 2 ahn / und jr differentz ist 2 / so zel die zalen / dazu thu 1. Das multiplicir in dein zal der zalen.

Es wird also die Regel angegeben, nach der man die Summe einer arithmetischen Reihe 1. Ordnung findet, wenn Anfangsglied a, Endglied t und Gliederanzahl n bekannt sind; in mathematischer Zeichensprache:

$$s = \frac{n}{2}[a + t].$$

Dann folgt der spezielle Fall, wo $a = 1$, $d = 2$ ist, also die Reihe der ungeraden Zahlen addiert werden soll; man hat dann:

$$s = \frac{n}{2}[1 + 1 + (n - 1) \cdot 2] = n^2.$$

Drittens wird die Reihe der geraden Zahlen addiert, wobei sich ergibt:

$$s = \frac{n}{2}[2 + 2 + (n - 1) \cdot 2] = (n + 1) \cdot n.$$

In Geometrischen progressen Multiplicir die größer mit der zal / welche jr proportiones nennet. Davon subtrahir die kleyner zal. Das übrig dividir durch die zal so umb ein unitet kleyner ist / denn die zal die da nennet die proportiones deyner gesetzten zalen.

Stifel bezeichnet unser „Quotient der Reihe“ mit „proportio“, unser „Anfangsglied“ mit „kleinere Zahl“, unser „Endglied“ mit „größere Zahl“, so daß die Formel entsteht:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}.$$

Wenn man hoch aufffteygen will in einer geometrischen progreß / wie man die letzte zal behendiglich finden möge.

Schreib zum ersten etliche zalen deiner progreß von jrem anfang her / und verzeychne sie mit zalen natürlicher ordnung / wie du hie sihest

0	1	2	3	4	5
3	6	12	24	48	96

Nu will ich wissen, was mir kommen würde / so ich also fort für bis auff die zwentzigste zal / wie ich hie bin kommen bis auff die sechste zal.

So ich 96 multiplicir mit 48 und dividir das product durch 3 (drumb das 3. ist die erste zal und nicht die unitet) so kompt 1536 / das ist die zal der stat / so verzeichnet werden soll mit 9. (wie mir die zwo obern zalen 4 und 5 zeygen mit jrem addiren.) Drumb ist 1536 die zal der zehenden stat. So multiplicir ich nu 96 in sich selbs / und dividir abermal das product durch 3. (drumb das 3 ist die erste zal / die ein unitet sein solt) so kompt 3072. Das ist die zal der stat so mit 10 sol verzeichnet werden (wie mir 5 die ob 96 stehen / zeigen mit jrem duplat). Drumb ist 3072 die zal der eylfften stat. So multiplicir ich nu 3072 mit 1536 und dividir das product abermal mit 3. (aus vorgesagter ursach) so kompt denn 1572864. Das ist die zal der stat / so mit 19 sol verzeychnet werden (wie mir 9 und 10 zeygen) drumb ists die zal an der zwentzigsten stat / in diser oben gesetzten progreß.

In moderner Zeichensprache:

$$\left.\begin{aligned} 96 &= aq^5 \\ 48 &= aq^4 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} \frac{aq^5 \cdot aq^4}{a} &= aq^9 = 1536, \\ \frac{aq^5 \cdot aq^5}{a} &= aq^{10} = 3072, \\ \frac{aq^9 \cdot aq^{10}}{a} &= aq^{19} = 1572864. \end{aligned}$$

Die Formel $t = a \cdot q^{n-1}$ ist leicht aus der umständlichen Ausdrucksweise Rudolffs herauszulesen. Man erkennt wieder, welche außerordentlichen Vorteile die mathematische Zeichensprache darbietet, die uns heute so selbstverständlich erscheint.

ARITHMETIKBÜCHLEIN, ENTHALTEND NICHT NUR BEKANNTE UND GEBRÄUCHLICHE VORSCHRIFTEN, SONDERN AUCH IHRE ABLEITUNGEN, HERAUSGEGEBEN VON VICTOR STRIGEL.

Leipzig, Voegels Druckerei, 1563.
Aus dem Lateinischen übersetzt von M. Gebhardt.

EINE, GEWÖHNLICH „TISCH DES PYTHAGORAS“ GENANNTE TAFEL, DEREN GEBRAUCH IM FOLGENDEN ERKLÄRT WERDEN SOLL.

Wenn man sich auch in erster Linie eine gute Seefahrt, bei der man mit geschwellten Segeln und günstigen Winden dem Hafen zustrebt, wünschen muß, man es aber als weniger gute Fahrt bezeichnen muß, wenn man Gegenwinde hat, kunstvoll gegen diese ankämpft und einstweilen in schrägem Kurs vorwärtszukommen sucht: so müssen die Anfänger einer Kunst schon zufrieden sein mit einer Fahrt der letzten Art, solange sie bei einer der ersten Art das Steuer noch nicht zu führen vermögen; d. h. sie müssen sich so lange gewisser Gedächtnishilfen bedienen und sie nicht etwa unwillig zurückweisen, als sie nicht gelernt haben, auch ohne Korkgürtel zu schwimmen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
	4	6	8	10	12	14	16	18	2
	Qua	9	12	15	18	21	24	27	3
		dra	16	20	24	28	32	36	4
			ti	25	30	35	40	45	5
				nu	36	42	48	54	6
					me	49	56	63	7
						ri	64	72	8
								81	9

Fig. 26.

Willst du nun zwei Zahlen miteinander multiplizieren, so magst du sie an den äußersten Enden des Winkelstreifens (Gnomons)[1] *aufsuchen, der mit seinem oberen oder wagrechten und seinem senkrechten Schenkel die Fläche der Tafel abschließt, derart, daß du etwa immer die größere Zahl aus der wagerechten, die kleinere aus der senkrechten Spalte entnimmst. Denn die gemeinsame Ecke oder, wie man auch sagt, der Winkelscheitel, wird das Resultat der Multiplikation angeben.*

1) Vgl. S. 14.

Wenn du also etwa 8 *mit* 7 *multiplizieren willst, so findest du in dem zugehörigen Scheitel* 56, *was herauskommen muß.*

In den äußersten Kästchen oder Feldern der Diagonallinie aber sind die Quadratzahlen zusammengestellt, wie aus einem Blick auf die Tabelle sofort klar wird.

Diese Einmaleins-Tafel kehrt unter demselben Namen in den meisten Rechenbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts immer wieder.

LEICHTE ANLEITUNG IN DER PRAKTISCHEN ARITHMETIK DURCH GEMMA FRISIUS, ARZT UND MATHEMATIKER.

Leipzig, Johannes Rhamba, 1568.[1])

Aus dem Lateinischen übersetzt von M. Gebhardt.

BEISPIEL AUS DER VERMESSUNGSKUNST.

Von einem dreieckigen Acker, der aber nicht rechtwinklig ist, also wie ABC *in der Figur, seien die* 3 *Seiten bekannt; die erste* AB *sei* 13 *Längeneinheiten, die zweite* BC 14 *Längeneinheiten, die dritte* AC 15 *Längeneinheiten groß. Gesucht wird der Flächeninhalt dieses Ackers.*

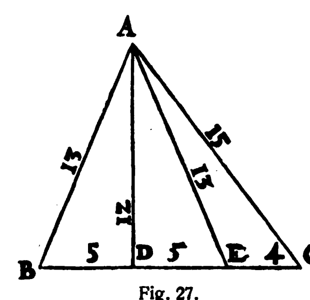


Fig. 27.

Die klarste und üblichste Art der Auflösung benutzt den „Cathetus“[2]), *d. h. das auf irgend eine Dreiecksseite vom gegenüberliegenden Winkel aus gefällte Lot. Wollen wir demnach das auf die Seite* BC *vom Winkel* A *unseres Dreiecks aus gefällte Lot* AD *bestimmen, so finden wir seine Länge folgendermaßen:*

Zunächst quadriere jede Dreiecksseite, d. h. multipliziere sie mit sich selbst; dadurch wird das Quadrat der Seite AB 169, *das der Seite* BC *wird* 196, *endlich das der Seite* CA 225. *Füge nun zu dem Quadrate von* BC *das von* AB

---

1) 1. Aufl. 1540.

2) So ist offenbar zu lesen, statt des „Catherus“ im Original.

hinzu, so entsteht 365; *von dieser Summe ziehe das Quadrat der übriggebliebenen Seite AC, also* 225, *ab; dann bleibt* 140 *übrig. Die Hälfte hiervon, also* 70, *teile durch* 14, *d. h. durch die Teile derjenigen Seite, auf die vorher das Lot gefällt worden war; dann erhältst du zum Quotienten* 5, *d. i. aber die Länge von BD. Wenn du nun das Quadrat hiervon, also* 25, *vom Quadrate der Seite AB, also* 169, *abziehst, bleibt* 144, *woraus die Quadratwurzel* 12 *die Länge des „Cathetus" AD liefert.*

Dieselbe kannst du auch so finden, daß du dem Quadrate der Seite BC wieder das Quadrat der Seite AC hinzufügst, dadurch also 421 *erhältst. Davon ziehe* 169 *ab, das Quadrat der Seite AB; dann bleibt* 252; *die Hälfte* 126 *hiervon durch* 14 *geteilt gibt als Quotienten* 9, *nämlich die Länge CD, deren Quadrat* 31, *von* 224 *abgezogen, das Quadrat des Lotes AD liefert. Daher ist die Quadratwurzel aus* 144, *nämlich* 12, *wie früher, das Lot AD selbst.*

Um schließlich die Fläche des dreieckigen Ackers zu finden, multipliziere nur noch mit der halben Basis das gefundene Lot, wodurch sich 84 *Quadrateinheiten ergeben. Das aber ist die wahre Fläche des Ackers.*

Auf dieselbe Weise findest du die Fläche des Dreiecks ABE zu 60 *Quadrateinheiten, diejenige des Dreiecks AEC zu* 24 *usw.*

Ende.

Die benutzten Formeln sind leicht abzuleiten (Fig. 28).

$$h^2 = c^2 - q^2 = b^2 - p^2,$$
$$c^2 - (a-p)^2 = b^2 - p^2$$

also:

$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

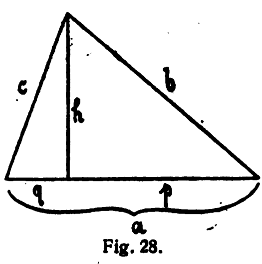


Fig. 28.

Die Rechnung Gemmas, in unsere Zeichensprache übersetzt, verläuft so (Fig. 27):

Gegeben: $AB = 13$
$BC = 14$
$CA = 15$.

Man mache $AD \perp CB$

$$BC^2 + AB^2 - AC^2 = 196 + 169 - 225 = 140$$

$$BD = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC} = \frac{140}{2 \cdot 14} = 5$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

oder auch:

$$CD = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC} = 9$$

also wieder

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{225 - 81} = 12$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84.$$

ÜBER DIE BERECHNUNG EINER QUADRATWURZEL BEI BOMBELLI.

Aus dem Werke L'Algebra von 1572. (Aus dem Italienischen übersetzt von G. Wertheim.) Abh. zur Gesch. d. Math. Heft VIII, Leipzig 1898.

... Um nun zur Sache zu kommen, sage ich, es werde vorausgesetzt, man wolle annäherungsweise die Quadratwurzel aus 13 ziehen. Dieselbe ist 3 und es bleibt der Rest 4, der bei der Division durch 6 (dem Doppelten der oben genannten 3) $\frac{2}{3}$ *liefert, und dies ist der erste Bruch. Diesen hat man zu 3 zu addieren, was* $3\frac{2}{3}$ *gibt, und das ist der erste Näherungswert der Wurzel aus 13, weil sein Quadrat* $13\frac{4}{9}$ *ist, was um* $\frac{4}{9}$ *zu viel ist. Wollen wir uns aber noch mehr nähern, so addieren wir zu 6, dem Doppelten von 3, den Bruch, d. i.* $\frac{2}{3}$, *was* $6\frac{2}{3}$ *ergibt, und hierdurch dividieren wir 4, die Differenz zwischen 9 und 13; wir erhalten* $\frac{3}{5}$; *dies zu 3 addiert gibt* $3\frac{3}{5}$, *und das ist der Näherungswert*

der Wurzel aus 13; *sein Quadrat ist* $12\frac{24}{25}$, *ist also näher als* $3\frac{2}{3}$. *Will man noch näher kommen, addiere man den Bruch zu* 6, *macht* $6\frac{3}{5}$, *und damit dividieren wir in* 4, *was* $\frac{20}{33}$ *ergibt, und das addiere man, wie oben getan, zu* 3, *macht* $3\frac{20}{33}$, *was die andere noch näher kommende Zahl ist, denn ihr Quadrat ist* $13\frac{4}{1089}$, *was um* $\frac{4}{1089}$ *zu viel ist. Und wollen wir noch näher kommen, so teilen wir* 4 *durch* $6\frac{20}{33}\cdots$ *Und so vorgehend können wir uns bis auf einen unmerkbaren Betrag annähern.*

Bombelli gibt auch einen Beweis für die Richtigkeit seiner Regel, bei deren Wiedergabe wir aber die schwerfällige Darstellung durch Worte in moderne Gleichungen umwandeln, ohne den Gedankengang irgendwie zu verändern:

Setzt man

$$\sqrt{13} = 3 + x,$$

so wird

$$13 = 9 + 6x + x^2,$$

also

$$4 = 6x + x^2.$$

Viele haben nun x^2 *weggelassen und erhielten so*

$$x = \frac{2}{3}, \quad \sqrt{13} = 3\frac{2}{3}.$$

Wollen wir aber auch x^2 *in Rechnung ziehen, so multiplizieren wir die Gleichung* $x = \frac{2}{3}$ *mit* x *und erhalten*

$$x^2 = \frac{2}{3}x, \quad \textit{also} \quad 6x + \frac{2}{3}x = 4,$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{3}{5}, \quad \sqrt{13} = 3\frac{3}{5}.$$

Der Leser kann den Beweis nun selbst weiter führen und endlich auch zeigen, daß die Regel nichts anderes enthält als die Kettenbruchentwickelung

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a \ldots}}}$$

Was die Bezeichnung anlangt, so wird die Unbekannte hier tanto, ihr Quadrat potenza genannt.

In vielen Rechenbüchern und mathematischen Werken des Mittelalters bis in die neuere Zeit hinein suchte man den Wert der Mathematik aus der Heiligen Schrift zu begründen. Oft war auch der Verfasser bestrebt, durch gelegentliche Bemerkungen und Einflechtungen dem Leser zu zeigen, daß er ein rechtgläubiger und frommer Mann sei. Wie weit die Verflechtung mathematischer und religiöser Gedanken gehen konnte, zeigt folgende durchaus ernst gemeinte Rechenandacht, die sich in einer (ungedruckten) Holsteinischen Rechne-Schul vom Jahre 1676 findet, deren Verfasser aus den Anfangsbuchstaben der Zeilen zu erkennen ist. (Veröffentlicht im Programm d. Kgl. Gymn. Glückstadt 1894 von Rießen).

Rechnens-Andacht.

Halt Täglich Abrechnung.

Herr du zählest meine Haar', auch die Sterne allzumal
Ei mein Gott, laß auch mich zählen, was für Wohlthat ohne Zahl, } Numeratio.

Ich von dir empfangen hab', o mein Gott, du legst unmeßlich
Neue Gnade mir hinzu, laß mich doch nicht sein vergeßlich } Additio.

Ruhm und Dank dir zuzulegen. Du nimmst ab die Sündenstraf
Jesu, gieb, daß ich vom Bösen auch nehm ab, und Gutes schaff. } Subtractio.

Christe Jesu, du vermehrest Zeit und Tage,
Gnad und Ehre
Herr vermehr in mir was gut, daß sich nicht
dein Zorn vermehre.
} Multiplicatio.

Treuer Gott, du kannst einteilen, alles wie
es gehen soll
Hilf mir so mein Werk abteilen, daß es mag
geraten wohl.
} Divisio.

O mein Gott, o drei in eins, gieb daß ich mit
Fleiß ausübe
Auch die edle Regul drei, von dem Glauben,
von der Liebe
} Reg. de tri.

Samt der Hoffnung. Herr du hassest, die, so
falsch gesinnet sind
Pflanz o Gott in mir die Wahrheit, daß kein
falsch mein Herz empfind'
} Reg. falsi.

Eins bitt ich noch mein Gott, ach um Jesu Blut und Sterben,
Rechne mir ja nimmer zu meine Sünde zum Verderben,
Nur laß' dies mein facit sein: daß ich mag den Himmel erben.



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.



...buch für Mathematiker

von

Prof. Dr. **Felix Müller**

3. Aufl. Mit einem Bildnis des Verfassers. 1912. Steif geh. M 2.—

Das „Gedenktagebuch für Mathematiker" enthält zahlreiche Daten aus der Geschichte der Mathematik, auf alle Tage des Jahres verteilt. Es ist im Jahre 1879, also vor nunmehr 32 Jahren, aus folgender Überlegung entstanden. In den Notizen, welche in unsern Kalendern die einzelnen Tage eines Jahres als „Gedenktage" charakterisieren, finden sich sehr selten Namen von großen Mathematikern, Physikern und Astronomen. Der Verdruß über die Vernachlässigung der Männer der exakten Wissenschaften seitens der Kalendermacher war die Veranlassung, die Geburts- und Sterbetage bekannter Mathematiker, Physiker und Astronomen sowie andere für die Geschichte der exakten Wissenschaften wichtige Daten in einen besonderen Notizkalender einzutragen. Erst im Laufe mehrerer Jahre gelang es, für einen jeden Tag des Jahres eine historisch wichtige Notiz zu gewinnen. Jetzt trägt ein jeder Tag des Jahres im „Gedenktagebuch" eine größere Zahl von Nachrichten, die den Fachgenossen willkommen sein werden. — Die neue Ausgabe ist nur einseitig bedruckt, was vielen Benutzern zu eigenhändigen Ergänzungen und Notizen willkommen sein dürfte.

Dr. W. Ahrens:

Mathematische Unterhaltungen und Spiele

2., vermehrte und verbesserte Auflage. In 2 Bänden. I. Band. Mit 200 Fig. gr. 8. 1911. In Leinw. geb. M 7.50. II. Band in Vorb.

Kleine Ausgabe: **Mathematische Spiele.** 170. Bändchen der Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen **„Aus Natur und Geisteswelt."** Mit einem Titelbild und 69 Figuren im Text. 8. Geh. M 1.—, in Leinw. geb. M 1.25

„...Dem wissenschaftlichen Interesse wird Verfasser gerecht, indem er durch die sorgfältig zusammengetragene Literatur und durch Einschaltungen mathematischen Inhalts die Beziehungen zur Wissenschaft herstellt: dem Nichtmathematiker kommt er durch die trefflichen Erläuterungen entgegen, die er der Lösung der verschiedenen Spiele zuteil werden läßt, und die er, wo nur irgend nötig, durch Schemata, Figuren und dergleichen unterstützt."

(Prof. Czuber in der Zeitschrift für das Realschulwesen.)

Scherz und Ernst in der Mathematik

Geflügelte und ungeflügelte Worte

gr. 8. 1904. In Leinwand geb. M 8.—

„Ein ‚Büchmann' für das Spezialgebiet der mathematischen Literatur.... Manch ein kurzes treffendes Wort verbreitet Licht über das Streben der in der mathematischen Wissenschaft führenden Geister. Hierdurch aber wird das sorgfältig gearbeitete Ahrenssche Werk eine zuverlässige Quelle nicht allein der Unterhaltung, sondern auch der Belehrung über Wesen, Zweck, Aufgabe und Geschichte der Mathematik". **(J. Norrenberg in der Monatsschrift für höhere Schulen.)**